

Tekintsünk egy értelmes mondatot. A mondat minden egyes betűje alá írjuk azt a számot, ahányszor az illető betű előfordul a mondatban; így egy olyan számsorozatot kapunk, amely a kiindulási mondatmal azonos hosszúságú. Eme számsorozat valamennyi eleme alá beírjuk az illető szám előfordulásainak számát a számsorozatban, majd ugyanezt ismételjük meg a keletkezett új számsorozattal, stb. Mindaddig folytatjuk ezt az eljárást, amíg olyan sorozathoz nem jutunk, amely megegyezik a (közvetlenül) fölötte állóval.

Nézzük a következő példát:

Á L O M B A N,	S Z E R E L E M B E N	N I N C S	L E H E T E T L E N S É G
1, 4, 1, 2, 2, 1, 5,	3, 1, 8, 1, 8, 4, 8, 2, 2, 8, 5,	5, 1, 5, 1, 3,	4, 8, 1, 8, 2, 8, 2, 4, 8, 5, 3, 1, 1
10, 4, 10, 6, 6, 10, 5,	3, 10, 8, 10, 8, 4, 8, 6, 6, 8, 5,	5, 10, 5, 10, 3,	4, 8, 10, 8, 6, 8, 6, 4, 8, 5, 3, 10, 10
10, 4, 10, 6, 6, 10, 5,	3, 10, 8, 10, 8, 4, 8, 6, 6, 8, 5,	5, 10, 5, 10, 3,	4, 8, 10, 8, 6, 8, 6, 4, 8, 5, 3, 10, 10

A mondatok többsége a példánkéhoz hasonlóan viselkedik, azaz már a harmadik számsor megegyezik a másodikkal. Ritkábbak az olyan mondatok, amelyeknél csak a negyedik vagy annál későbbi sor ismétlődik; ilyenek például a következők: „A BOLDOGSÁG RELATÍV, S CSAK UTÓLAG ISMERHETŐ FEL” (Peter Marshall), ill. „AZ EMBER NEM ANNYI, AMENNYI, HANEM ANNYI, AMENNYI TŐLE KITELIK” (Örkény István). Annak érdekében, hogy minél több különböző számsor után következzenek csak be ismétlődés, keressük az alapmondatot

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_t; tb; 2tc; 2^2td; 2^3te; \dots; 2^ktz$$

alakban, azaz úgy, hogy abban  $t$ -féle betű  $1$ -szer, egy betű (itt a  $b$  jelű)  $t$ -szer, egy másik  $2t$ -szer, egy  $2^2t$ -szer,  $\dots$ , egy pedig  $2^kt$ -szer forduljon elő. A  $t = 2, k = 2$  esetre egy példa: EKE KEREKE KELLENE (ekkor öt különböző számsor keletkezik). A fenti képlet „hígítható” is, a következőképpen: ha az  $n$  a  $t$ -hez relatív prím, a mondatot kibővíthetjük  $n$  darab  $x$  és/vagy  $n^2$  darab  $y$  és/vagy  $n^3$  darab  $z, \dots$  „jelű betűvel”, ahol  $x, y, z, \dots$  az eredeti mondatban nem szerepelt, egyébként tetszőleges betűk lehetnek. Például az előbbi mondat típusának egy lehetséges hígítása: AZ ELEMENT MELEG TELET TEMETGETEM.

Vizsgáljuk meg a továbbiakban, legfeljebb hány különböző számsort kaphatunk egy (értelmes) egyszerű mondat révén. Tegyük fel, hogy a szóban forgó mondat összesen  $n$  betűből áll. A mondatához tartozó  $i$ -edik számsorozatban  $n$ -nél nem nagyobb természetes számok állnak, és ezek közül bármelyik  $k$  érték legalább  $k$ -szor fordul elő. Pontosabban, egy  $k$  szám  $l \cdot k$  helyen szerepel itt, ha az  $i - 1$ -edik sorban  $l$ -féle olyan szám (vagy,  $i = 1$  esetén, betű) található, amely ott  $k$ -szor fordul elő. Megállapíthatjuk, hogy az  $i + 1$ -edik sor éppen akkor különbözik az  $i$ -edikétől, ha az iménti  $l$ -ek között létezik  $1$ -nél nagyobb. Jelöljük a különböző számsorok számát  $d$ -vel;  $i = 1$ -től  $d - 1$ -ig haladva legyen az  $i$ -edik sorban  $a_i$  a legkisebb olyan szám, amelyik alatt az  $i + 1$ -edik sorban nála nagyobb többszöröse áll.

Megmutatjuk, hogy

$$a_1 \leq \frac{a_2}{2} \leq \frac{a_3}{2^2} \leq \dots \leq \frac{a_{d-2}}{2^{d-3}} \leq \frac{a_{d-1}}{2^{d-2}}.$$

Választásunk folytán az  $i + 1$ -edik sorban  $a_{i+1}$  (bármelyik előfordulása) alatt nála nagyobb szám áll. Ez azt jelenti, hogy az  $i + 1$ -edik sorban  $a_{i+1}$ -nél több  $a_{i+1}$ -es található, vagyis az  $i$ -edik sorban legalább két különböző szám is  $a_{i+1}$ -szer szerepel. Egyikük – jelöljük ezt  $r$ -rel – valódi osztója (az alatta álló)  $a_{i+1}$ -nek, így  $r \geq a_i$ , tehát valóban  $a_i \leq r \leq \frac{a_{i+1}}{2}$ .

A bizonyított egyenlőtlenségek alapján

$$1 \leq a_1 \leq \frac{a_{d-1}}{2^{d-2}} \leq \frac{n/2}{2^{d-2}},$$

ezért

$$(2) \quad 2^{d-1} \leq n, \text{ azaz } d \leq 1 + \log_2 n.$$

Látható, hogy a (2) becslés szempontjából az (1) szerkezetű mondatok optimálisak, hiszen  $t = 2$  esetén a lehető legnagyobb  $d$  értéket adják. Mivel a  $d$ -re kapott felső korlát lényegében a mondat hosszának logaritmus, azért (egyszerű mondatnál)  $d$  valószínűleg nem lehet több 6-nál. A  $d = 6$  elérhető, például: EDE, KELLENEK-E ERRE E KEREK EKEKEREKEK?

Összetett mondatra  $d$  lehet 7: EDE, ERRE KELLETTEK FEKETE KEREK EKEKEREKEK, MERT ELREPEDTEK FELETTED KEREK EKEKEREKEK?! Kérdés, hogy lehetséges-e még  $d = 8$ ; elég valószínű azonban, hogy  $d = 9$  már nem fordulhat elő.

Ha értelmezzük egy mondat *magasságát* mint a belőle képzett különböző számsorozatoknak a számát, akkor ezzel új lehetőség nyílik irodalmi alkotások elemzésére. Például a versek soraihoz vagy a novellák mondataihoz hozzárendelhetjük a magasságukat, és vizsgálhatjuk ezeknek az értékeknek az eloszlását. Hasonlóan próbálkozhatunk zeneművek esetén tanulmányozásával is  $\dots$  Mindezeknek a gondolatoknak a továbbvitelére már a kedves Olvasót biztatom, hiszen – Karl Weierstrass szavait idézve –, „Az a matematikus, aki nem költő is egy kicsit, nem lehet igaz matematikus.”