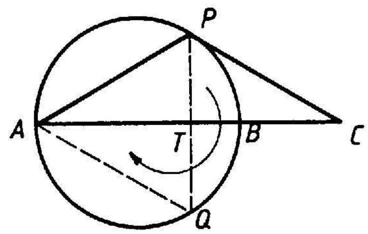
1. A címben említett gyakorlat így szólt: *Az AB átmérőjű kör tetszőleges pontja P. A P középpontú, PA sugarú kör az AB egyenest C-ben metszi. Mikor lesz az APC háromszög területe a legnagyobb?* A közölt elemi megoldás[1] a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget használja fel. A maximumot a $3r$ alapú háromszög szolgáltatja.

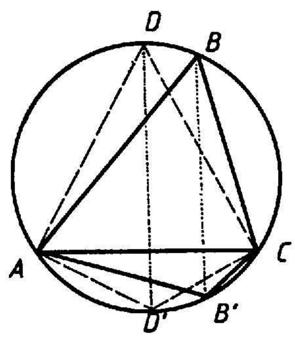


1. *ábra*

A feladat így kissé erőltetettnek tűnik, pedig egy elég természetes kérdéshez jutunk, ha 180°-kal elforgatjuk a P pont AB-n levő T merőleges vetülete körül a háromszög CPT felét (*1. ábra*). Ekkor ugyanis a C pont A-ba kerül, P pedig az AB-re vonatkozó Q tükörképébe, ami a körön van. Ahhoz a kérdéshez jutottunk tehát, hogy *adott körbe írt egyenlő szárú háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe.* A talált megoldás könnyen láthatóan azt adja, hogy a szabályos háromszögé.

Vizsgálhatjuk általánosabban azt a kérdést, hogy az *adott körbe írt összes háromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe.* Ha válaszul most is a szabályos háromszöget kapjuk, (tehát egyenlő szárút), akkor ez az előbbi, speciálisabb problémának is megoldása.

Kényelmes lesz a továbbiakban sokszögek területét ugyanúgy jelölni, mint magát a sokszöget. Ez nem fog félreértésre okot adni.



2. *ábra*

2. Az utolsó kérdésre a múlt században a következő meglepően egyszerű válasz született. Ha az ABC háromszögben $AB \neq BC$, és az ABC ív felezőpontja D, akkor

$$ADC > ABC,$$

mert a közös oldalra merőleges magasságoknak ez a viszonya *(2. ábra)*. Így minden háromszöghöz találunk nagyobb területűt, csak a szabályoshoz nem, annak kell tehát a legnagyobb területűnek lennie.

A bökkenő csak az, hogy ezzel a gondolatmenettel azt is be lehet látni, hogy 1 a legnagyobb pozitív egész szám; hiszen négyzetre emelve őket mindegyikhez egy nagyobbat kapunk, csak az 1 marad 1.

Kereshetnénk a hibás eredmény okát abban, hogy a pozitív egészek közt előfordul bármilyen számnál nagyobb, viszont háromszögeink területe mindig kisebb például a kör területénél. Ez sem oldja azonban meg a problémát.

A $2 - 1/n$ $(n = 1, 2, \dots)$ számok mind kisebbek, mint 2, és mindegyikhez egy nagyobb pár a $2 - 1/n^2$, kivéve, ha $n = 1$, amikor a szám párja önmaga. Gondolatmenetünk szerint tehát ezek közt a számok közt is a $2 - 1/1 = 1$-nek kellene a legnagyobbnak lennie, holott ő a legkisebb.

3. Az ellenvetések természetesen jogosak, mégis az lehet az érzésünk, hogy a felvetett alapgondolatból kiindulva valahogyan el lehet jutni annak elemi geometriai úton történő bizonyításához, hogy *adott körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb.*

Próbáljuk meg ismételten alkalmazni az eljárást. Jelöljük a csúcsokat és szögeket a szokásos módon, és válasszuk a jelölést úgy, hogy $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ álljon fenn. Ha a háromszög nem szabályos, akkor könnyű látni, hogy

(1) $$\alpha < 60° < \gamma.$$

[1]Lásd e Lapok 41. (1991. évi) kötetének 456–457. oldalán.

Ha most B-t az ABC ív felezőpontjába toljuk, akkor a kerületi szögekre vonatkozó tétel szerint β változatlan marad, a másik két szög pedig $90^\circ - \beta/2$-re változik.

Ha β történetesen 60°, akkor azt kapjuk, hogy a kiindulási háromszög területe kisebb a szabályosénál. Ha $\beta \neq 60^\circ$, akkor az új háromszög szögeinek 60°-tól való eltérését nézve a szögek

$$60^\circ + (30^\circ - \beta/2), \quad 60^\circ + (30^\circ - \beta/2), \quad 60^\circ - (60^\circ - \beta).$$

Bevezetjük a $\delta = 30^\circ - \beta/2 = (60^\circ - \beta)/2$ jelölést. Ekkor a szögek

$$60^\circ + \delta, \quad 60^\circ + \delta, \quad 60^\circ - 2\delta.$$

Itt δ lehet pozitív is, negatív is aszerint, hogy $\beta < 60^\circ$, vagy $\beta > 60^\circ$.

Az eljárást most az egyik szár rögzítésével kell megismételnünk, tehát β szerepét az egyik $60^\circ + \delta$ nagyságú szög veszi át. Így a két egyenlő szög nagysága

$$90^\circ - (60^\circ + \delta)/2 = 60^\circ - \delta/2$$

lesz, tehát az újabb háromszög szögei

$$60^\circ - \delta/2, \quad 60^\circ - \delta/2, \quad 60^\circ + \delta.$$

A lépések számát (1, illetőleg 2) n-nel jelölve a két eset így foglalható össze:

$$60^\circ + (-1/2)^{n-1}\delta, \quad 60^\circ + (-1/2)^{n-1}\delta, \quad 60^\circ + (-1/2)^{n-2}\delta.$$

Ha n valamilyen m értékére a szögek ilyen alakúak, akkor az $m+1$-edik lépésben az egyik $60^\circ + (-1/2)^{m-1}\delta = 60^\circ + (-1/2)^{(m+1)-2}\delta$ nagyságú szög marad változatlan, a másik kettő pedig a következőre változik:

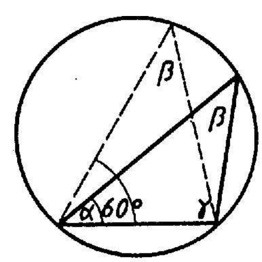
$$90^\circ - [60^\circ + (-1/2)^{m-1}\delta]/2 = 60^\circ + (-1/2)^m\delta = 60^\circ + (-1/2)^{(m+1)-1}\delta.$$

A talált szabályosság tehát az $m+1$ -edik lépés után is érvényben marad, így minden lépésszám esetén fennáll.

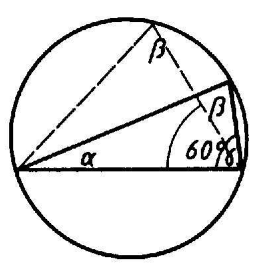
Azt találtuk tehát, hogy ha szabályos háromszöget nem is kapunk, de a lépések számának növelésével ahhoz tetszés szerint közel kerülhetünk, a terület pedig eközben állandóan növekedik. Ez még jobban valószínűsíti a várt eredmény helyességét, de bizonyításnak még mindig nem tekinthető. Gondoljunk csak arra, hogy a $2-1/n$ alakú számok közt nem volt legnagyobb. Biztos-e, hogy háromszögeink közt van legnagyobb területű? Az okoskodás határátmenet képzésével teljessé tehető, de így egyszerűnek, vagy eleminek már nehezen mondható.

4. Egy egyszerű ötlettel mégis megmenthető a gondolatmenet elemi geometriai jellege. Gondoljunk arra, hogy egy lényegtelennek tűnő speciális esetben, ha $\beta = 60^\circ$, egy lépésben eljutottunk a szabályos háromszöghöz. Nem lehet-e az általános esetet erre visszavezetni? Erre a fellépő váltakozó előjel reményt nyújt.

Valóban, ha $\beta < 60^\circ$, tehát δ pozitív, akkor az első lépésben az (1) szerint 60°-nál kisebb α 60°-nál nagyobbra változik, ha meg $\beta > 60^\circ$, akkor a 60°-nál nagyobb γ változik 60°-nál kisebbre.



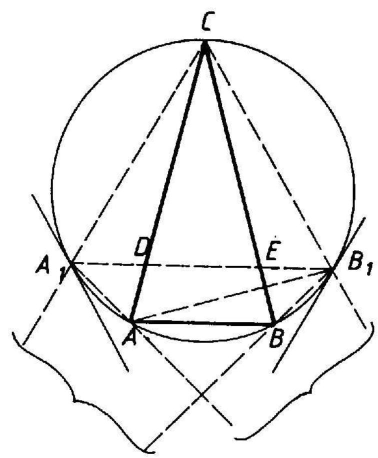
3a ábra



3b ábra

Legyünk az első lépésben kevésbé mohók, ne törekedjünk a legnagyobb növelésre B mozgatásával, hanem az első esetben csak addig növeljük a háromszög területét, míg α el nem éri a $60°$-ot, a másodikban pedig csak addig, míg γ $60°$-ra nem csökken (*3. ábra*). Ezután megismételve az eljárást, a második lépésben már a szabályos háromszöghöz jutunk. Így az eredeti gondolat körültekintőbb alkalmazásával legfeljebb két lépésben eljutunk annak megmutatásához, hogy ha egy körbe írt háromszög nem szabályos, akkor területe kisebb, mint a szabályosé. Ezzel a kimondott állításnak valóban egyszerű geometriai bizonyításához jutottunk.

5. Az eddigiekben a körbe írt egyenlő szárú háromszögekre vonatkozó problémát egy általánosabb problémába ágyazva oldottuk meg, azonban a 2. pontban felvetett eljárás, amelyik minden a körbe írt, nem szabályos háromszöghöz egy nagyobb területű egyenlő szárút szolgáltat, azt is jelenti, hogy az általános probléma helyett elegendő azt megmutatni, hogy *adott körbe írt egyenlő szárú háromszögek közül a szabályos területe a legnagyobb.*



4*a ábra*

Ez is megoldható elemi geometriai meggondolással. Legyen ABC egy körbe írt háromszög, amelyikre $AC = BC \neq AB$, és A_1B_1C az a szabályos háromszög, amelyiknek egyik csúcsa C.

Ha $ACB\sphericalangle < 60°$, akkor jelöljük D, E-vel az A_1B_1 szakasz metszéspontját az AC, illetőleg a BC szárral (*4a. ábra.*) Ez esetben azt kell megmutatnunk, hogy

$$ABED < A_1DC + EB_1C.$$

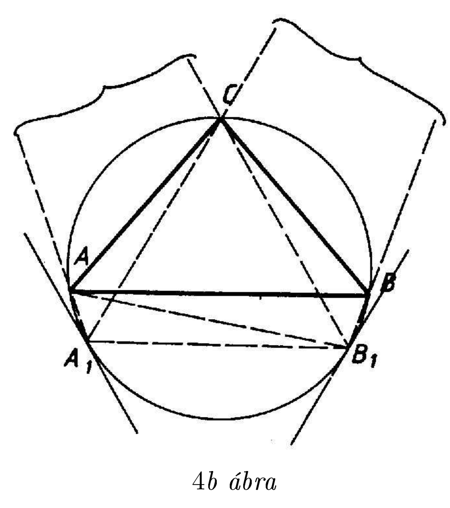
Ehelyett, mindkét területhez hozzávéve $A_1AD + BB_1E$-t, azt látjuk be, hogy

$$A_1ABB_1 < A_1AC + BB_1C.$$

Ehhez, a trapézt az AB_1 átlóval két részre vágva, azt mutatjuk meg, hogy

$$ABB_1 < BB_1C \quad \text{és} \quad A_1AB_1 < A_1AC.$$

Mindkét esetben a közös oldalra bocsátott magasságok közül a C-ből induló a nagyobb. Ez a következőképpen látható be. A körhöz az A_1-ben húzott érintő B_1C-vel párhuzamos, a B_1-ben húzott pedig A_1C-vel. Az A_1ABB_1 körív félkörnél kisebb (harmadkör), így azt mindkét egyenespár közti sáv tartalmazza. Ezért A_1A a B_1C oldal B_1-en túli meghosszabbítását metszi, B_1B pedig A_1C-nek az A_1-en túli meghosszabbítását, s így CA-nak is az A-n túli meghosszabbítását. Ebből állításaink következnek.



4*b ábra*

Ha $ABC\sphericalangle > 60°$, akkor AB metszi az A_1C és B_1C szárat (*4b. ábra*). Az előbbiekhez hasonlóan most annak bizonyítására vezethetjük vissza a feladatot, hogy

$$AA_1B_1B > AA_1C + B_1BC,$$

illetőleg tovább az

$$AA_1B_1 > AA_1C \text{ és } AB_1B > B_1BC$$

egyenlőtlenségek bizonyítására.

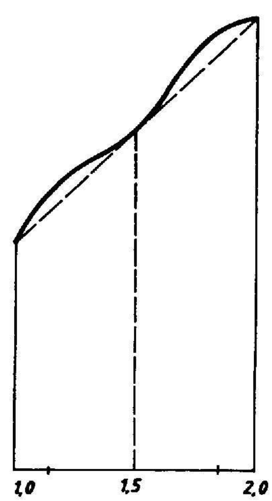
Mivel az A_1-ben és B_1-ben húzott érintő párhuzamos a szabályos háromszög szemben levő oldalával, továbbá A a kör A_1AC harmadán van, B pedig a B_1BC harmadon, így az A_1A egyenes B_1C-t a C-n túli meghosszabbításában metszi, B_1B pedig A_1C-t, s így AC-t is ugyancsak a C-n túli meghosszabbításában.

Ebből következik, hogy mindkét háromszögpárnál a közös oldalra merőleges magasságok közül a C-ből húzott a kisebb. Így most is fennáll mindkét egyenlőtlenség. Ezzel beláttuk a körbe írt egyenlő szárú háromszögekre kimondott tételt.

6. Térjünk még egyszer vissza a 2. pontban elemzett okoskodásra. Egy számhalmaz minden eleméhez hozzárendeltük egy nála nem kisebb elemét, és azt mondtuk, amelyikhez önmagát rendeltük, az a legnagyobb elem. Az egyik ellenpéldában az 1 és a 2 közti $x_n = 2 - 1/n$ számokhoz($n = 1, 2 \ldots$) a $2 - 1/n^2$-et rendeltük hozzá. Ezzel valóban növeltünk, mert

$$2 - \frac{1}{n^2} = 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = x_n + (2 - x_n)(x_n - 1).$$

Ebben az alakban a hozzáadandó nem csak az adott számhalmaz elemeire, hanem minden $1 < x < 2$ számra pozitív, viszont a számhalmaz két szélén, $x = 1$-re és $x = 2$-re 0. Ezzel minden esetre a legnagyobb elem is fellépett, a 2, ami a $2 - 1/n$ alakú számok közt nem szerepel.



5. *ábra*

Ha a fenti hozzárendelés helyett x-hez például az

$$x + (2 - x)(x - 1)(2x - 3)^2$$

értéket rendeljük hozzá, belátható, hogy 1 és 2 közti x-ekre ez is 1 és 2 közé esik *(5.ábra)*, de most már csak az 1, 1,5 és 2 kivételével jelent növekedést. Az tehát, hogy egy ilyen nem csökkentő hozzárendelés hol növel, hol nem, inkább a hozzárendelésre jellemző, mint a halmazra, amin értelmezve van. A halmazról csak annyit mondhatunk, hogy *ha van legnagyobb eleme,* azt a hozzárendelés nem növelheti. Ahhoz tehát, hogy egy ilyen fajta okoskodás bizonyító erejű legyen, mindenképpen szükséges bizonyítani, hogy a halmaznak van legnagyobb eleme.