A szögfüggvények tanulásakor bizonyára sokaknak feltűnik, hogy a 360° tört részeinél – kivéve 90° többszöröseit – valamelyik szögfüggvény értéke nem racionális szám. Az, hogy ez mindig így van, nem túl nehéz „felsőbb algebrai" módszerekkel bizonyítható. Az e módszerekhez szükséges ismeretek viszont több hónapos előkészítést igényelnek az egyetemi oktatásban.

A fenti állítás lényegében [1] a következőt jelenti:

Ha egy derékszögű háromszög oldalainak az aránya racionális szám, akkor (hegyes) szögeinek semmilyen racionális többszöröse sem lehet 360°.

Először azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor a háromszög oldalai 3, 4 és 5 egységnyiek. Tekintsük azt az α szöget, amelyik a 3 egységnyi oldallal szemben fekszik. Erre:

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \text{és} \qquad \sin\alpha = \frac{3}{5}\,.$$

Feladatunk annak a vizsgálata, hogy α-nak van-e olyan racionális többszöröse, amelyik 360°; más szóval, létezik-e olyan n pozitív egész szám, amelyre $n\cdot\alpha$ a 360°-nak egész számú többszöröse. Ez azzal ekvivalens, hogy $\sin(n\cdot\alpha)=0$. Ki kellene tehát számítani α többszöröseinek a szinuszát. Ezt egymás után meg is lehet tenni; de a számoláshoz szükség van e szögek koszinuszára is. A rekurziós képlet:

$$\begin{aligned}
\cos((n+1)\alpha) &= \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha = \frac{4}{5}\cos(n\alpha) - \frac{3}{5}\sin(n\alpha)\\
\sin((n+1)\alpha) &= \sin(n\alpha)\cos\alpha + \cos(n\alpha)\sin\alpha = \frac{4}{5}\sin(n\alpha) + \frac{3}{5}\cos(n\alpha)
\end{aligned}$$

alapján számoljuk ki az első néhány értéket. A törteket elkerülendő célszerű meggondolni, hogy mi áll majd az egyes nevezőkben. Az $(n+1)\cdot\alpha$ esetében kapott nevezők úgy keletkeznek az előző lépésben kapott nevezőkből, hogy azokat még 5-tel szorozzuk. Eszerint a nevezők sorra 5-nek eggyel nagyobb hatványai lesznek. Elég tehát a számlálókat meghatározni. Jelöljük ezeket c_n-nel, illetve s_n-nel; azaz legyen:

$$\cos(n\cdot\alpha) = \frac{c_n}{5^n} \qquad \text{és} \qquad \sin(n\cdot\alpha) = \frac{s_n}{5^n}\,.$$

Most felsoroljuk c_n, majd utána s_n értékét $n=1,\,\ldots,\,10$ esetén:

$$4,\ 7,\ -44,\ -527,\ -3\,116,\ -1\,173,\ -16\,124,\ 164\,833,\ 1\,721\,764,\ 9\,653\,287;$$

illetve:

$$3,\ 24,\ 117,\ 336,\ -237,\ -10\,296,\ -76\,443,\ -354\,144,\ -922\,077,\ 1\,476\,984.$$

Azt kell belátni, hogy ezekben a sorozatokban[2] (pontosabban szólva a második sorozatban) sehol sem áll 0. Láthatjuk, hogy ezek a számok nemcsak 0-tól különbözőek, hanem egyikük sem osztható 5-tel. Mivel pedig a nevező 5-nek egy hatványa, ezért a hányados más egész szám sem lehet. Mivel az 5-tel való osztás maradéka csak ötféle lehet, ezért várható, hogy ennek a bizonyítása könnyebb is, mint annak a megmutatása, hogy e számok egyike sem 0. Nézzük most sorban azt, hogy e számok mit adnak (legkisebb pozitív) maradékul, ha 5-tel osztunk:

$$\begin{aligned}
n &= 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\\
c_n \bmod 5 &= 4\ 2\ 1\ 3\ 4\ 2\ 1\ 3\ 4\quad 2\\
s_n \bmod 5 &= 3\ 4\ 2\ 1\ 3\ 4\ 2\ 1\ 3\quad 4
\end{aligned}$$

Látható, hogy a $c_n \bmod 5$, $s_n \bmod 5$ számpárok négyesével ismétlődnek. Mivel az első négy számpárban $s_n \bmod 5 \neq 0$, ezért az állítás igaznak tűnik.

Az általános eset vizsgálata előtt figyeljük még meg, hogy „miképpen" készül egy számpár az előző számpárból.

Láthatjuk, hogy az „$s_n \bmod 5$ sora" csak abban tér el a $c_n \bmod 5$ sorától, hogy ahhoz képest eggyel jobbra van tolva. Ez azt sugallja, hogy a képzési szabály „egységes". Mivel az 1 után 3 áll, ezért úgy látszik, hogy mindegyik szám az előzőnek „lényegében" a háromszorosa. Valóban:

$$3\cdot4 = 2\cdot5+2; \qquad 3\cdot2 = 1\cdot5+1; \qquad 3\cdot1 = 0\cdot5+3; \qquad 3\cdot3 = 1\cdot5+4.$$

Általában csak azt fogjuk vizsgálni, amikor az adott szög tangense racionális szám.
Így megengedjük azt is, hogy a szereplő derékszögű háromszög átfogója ne legyen egész.

---

[1] Matematikában olyankor használatos a „lényegében" szó, amikor a két állítás „néhány" esettől eltekintve ugyanaz; ezeknek a végignézése azonban annyira meghosszabbítaná a tárgyalást, és megzavarná a folyamatosságot, hogy célszerűbb valamit feláldozni a precizitásból. Most persze meg kellene magyarázni azt is, hogy mit jelent a „néhány". Gondolom, ezt azért „lényegében" mindenki érti.

[2] A sorozat számait egy „TI–74 BASICALC" zsebszámítógép segítségével számoltam ki, igen rövid idő alatt, a következő „BASIC" programmal: `100` $C=1$:$S=1$ – `110 FOR` $I=1$ `TO 10` – `120` X `= 4*`C`-3*`S : S `=3*`C`+4*`S:C `=` X – `130 PRINT "c=";`C`;"s=";`S`:PAUSE` – `140 NEXT` I – `150 END`.

Tekintsünk tehát egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek befogói egész számok.[3] Jelölje e befogókat c és s; és legyen α a c hosszúságú oldal melletti szög. Feltehető, hogy c és s relatív prímek; ellenkező esetben legnagyobb közös osztójukkal mindegyiküket elosztva ugyanazt a szöget kapjuk. Használni fogjuk még a $D = c^2 + s^2$ jelölést is. Ekkor az $n \cdot \alpha$ szinuszára és koszinuszára a következőket kapjuk:

$$\sin(n \cdot \alpha) = \frac{s_n}{(\sqrt{D})^n} \quad \text{és} \quad \cos(n \cdot \alpha) = \frac{c_n}{(\sqrt{D})^n}\,.$$

Az addíciós formulát felhasználva azonnal adódnak az alábbi rekurziós összefüggések:

$$c_{n+1} = c_n \cdot c_1 - s_n \cdot s_1 \qquad \text{és} \qquad s_{n+1} = c_n \cdot s_1 + s_n \cdot c_1.$$

Ha több esetet megpróbálunk, akkor az az érzésünk alakulhat ki, hogy„D-vel való oszthatóság szempontjából” olyan, mintha c_{n+1} a c_n-nek és s_{n+1} az s_n-nek a $2 \cdot c_1$ szerese volna.

Éppen ezért kiszámítjuk a $c_{n+1} - 2 \cdot c_1 \cdot c_n$ és az $s_{n+1} - 2 \cdot c_1 \cdot s_n$ értékét az $n > 1$ esetre:

$$c_{n+1} - 2 \cdot c_1 \cdot c_n = -c_n \cdot c_1 - s_n \cdot s_1 = -c_{n-1} \cdot (c_1^2 + s_1^2) = -c_{n-1} \cdot D,$$
$$s_{n+1} - 2 \cdot c_1 \cdot s_n = c_n \cdot s_1 - s_n \cdot c_1 = -s_{n-1} \cdot (c_1^2 + s_1^2) = -s_{n-1} \cdot D.$$

(Ha c_n -t és s_n-t $n = 0$-ra úgy definiáljuk, hogy $c_0 = 1$, $s_0 = 0$, akkor a fenti formulák az $n = 1$ esetben is érvényesek.)

Eszerint a következő rekurziót kaptuk:

$$c_{n+1} = 2 \cdot c_1 \cdot c_n - D \cdot c_{n-1}, \quad s_{n+1} = 2 \cdot c_1 \cdot s_n - D \cdot s_{n-1}, \quad \text{ha } n > 0.$$

Most két esetet különböztetünk meg. Az érdekesebb eset az, amikor D-nek van egy p páratlan prímosztója. Ekkor teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $n > 1$ esetén s_n nem osztható p-vel.

Az $n = 1$ esetben $D = c_1^2 + s_1^2$. Ha p osztója lenne s_1-nek, akkor ebből azonnal következne az is, hogy c_1-et is osztaná, ami azért lehetetlen, mert c-t és s-t relatív prímeknek választottuk. Ugyanígy látható be az is, hogy p a c_1-nek sem lehet osztója. Mivel $s_2 = 2 \cdot s_1 \cdot c_1$ és p páratlan, ezért p nem osztja s_2-t sem.

Tegyük most fel, hogy p nem osztja s_k-t, ahol $k > 1$. Mivel p páratlan és c_1-nek sem osztója, ezért nem lehet osztója $2 \cdot c_1 \cdot s_k$-nak sem. D-nek viszont osztója; amiből $s_{n+1} = 2 \cdot c_1 \cdot s_n - D \cdot s_{n-1}$ alapján következik, hogy p az s_{k+1}-et sem osztja.

Egyetlen eset maradt ki; amikor $D = 2^k$, valamely pozitív egész k-ra. Ekkor persze $c^2 + s^2 = 2^k$. Itt c és s egyike sem lehet páros, mert akkor ebből az összefüggésből az következne, hogy a másik is az; ami ellentmond annak a feltételnek, hogy s és c relatív prímek. Így mindketten páratlanok. Ismeretes, hogy páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul, azaz D 2-t ad maradékul a 8-cal való osztásnál. Eszerint D nem osztható 4-gyel, vagyis $D = 2$. Ez az eset tényleg „kivételes”, mert ekkor $\alpha = 45°$ és ennek a szögnek *van* olyan többszöröse, amelyik 360°.[4]

[3] Természetesen ennek így nincs értelme; arról van szó csupán, hogy a befogók aránya racionális szám.

[4] A komplex számok felhasználásával ez a bizonyítás még egyszerűbben mondható el.