Sok matematika könyv egymástól eltérően definiálja az exponenciális függvényeket.

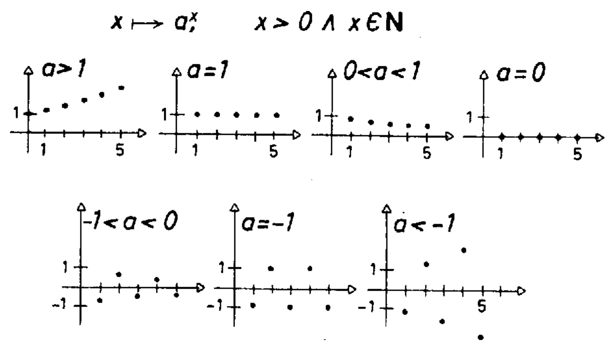
Például: Matematikai Feladatok Gyűjteménye (Tankönyvkiadó 10121/II. 188. old.): „az olyan kifejezéseket, amelyekben a hatvány alapja is és kitevője is változó, csak abban az esetben értelmezzük, ha az alap pozitív".

Rácz: Matematika II. 19. old.: „Az alaptól függően négy fajta exponenciális függvény létezik", $0^x, 1^x, b^x$, ha $b > 1$, illetve $0 < b < 1$.

Hajnal–Nemetz–Pintér: Matematika III. (Fakultáció B), (Tankönyvkiadó 13331/B. 252. old.): „$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ függvényeket exponenciális függvényeknek nevezzük."

Ezek kétségtelenül azok, de vajon csak ők az exponenciális függvények? Hiszen a mértani sorok kapcsán vizsgáljuk például a $\lim\limits_{x\to\infty} q^x$ határérték létezését minden $|q| < 1$ esetén.

Kövessük nyomon az exponenciális függvény fogalmának kialakítását. Az általános iskolában először a pozitív egész kitevőjű hatványokkal találkozunk. Itt az alap nem kérdéses, a^k $(k > 0$ és egész) k darab a szorzatát jelenti. Ha x pozitív egész, az $x \mapsto a^x$ függvény grafikonja diszkrét pontok halmaza *(1.ábra).*



1. ábra

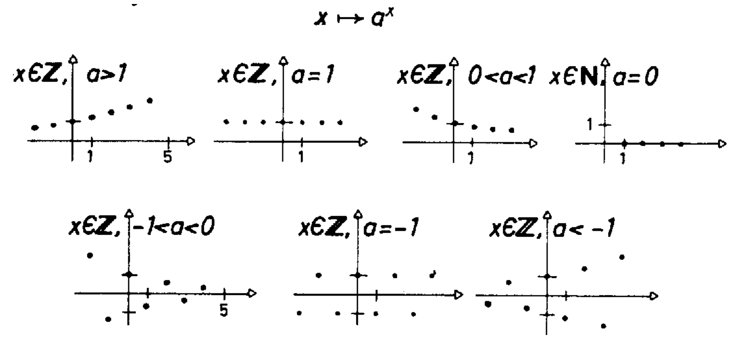
Vizsgálva az azonosságokat, beláttuk, hogy

$$k,\ l > 0 \text{ és egész, akkor } a^k \cdot a^l = a^{k+l}, \qquad (a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k,$$
$$k > l,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\quad a^k : a^l = a^{k-l}, \qquad (a : b)^k = a^k : b^k,$$
$$(a^k)^l = a^{k \cdot l}.$$

Az értelmezést ki akarjuk terjeszteni a 0 kitevőjű hatványra a fenti azonosságok megmaradásával. Legyen k pozitív egész, a fenti azonosságok alapján $a^k \cdot a^0 = a^k$ egyenlőségnek teljesülnie kell, azaz $a^k(a^0 - 1) = 0$, $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ db}}(a^0 - 1) = 0$.

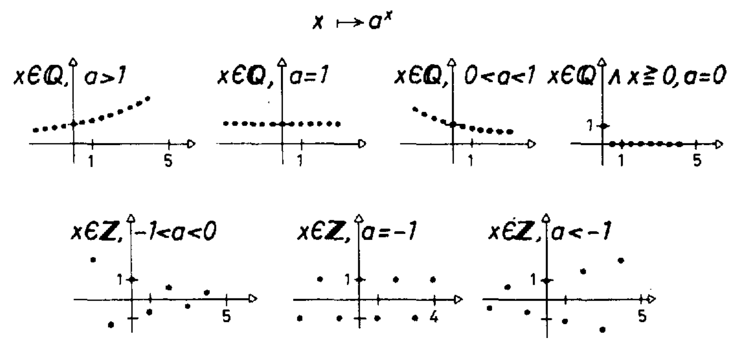
Ha $a \neq 0$, ez az egyenlőség akkor és csak akkor igaz, ha megállapodunk az $a^0 = 1$ (ha $a \neq 0$) definícióban. Ha $a = 0$, az egyenlőség az utolsó tényező tetszőleges értéke mellett is teljesül, ezért 0^x-nek az $x = 0$ helyen nem adunk helyettesítési értéket.

Az egész kitevőjű hatvány fogalmához ismét a felsorolt azonosságok permanenciája révén jutunk. Ha $k > 0$ és egész, $a^k \cdot a^{-k} = a^0$, ha $a \neq 0$, amely akkor igaz, ha $a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$, vagyis a 0-*tól különböző alapok esetén minden egész kitevőjű hatványt értelmezhetünk.* A 0-nak eddig csak pozitív egész kitevőjű hatványát sikerült definiálnunk. A függvények grafikonja most is diszkrét pontok halmaza, de igen jellemző tulajdonságokkal *(2. ábra).*



2. ábra

A hatvány fogalmát racionális kitevőre ismét a felsorolt azonosságok permanenciája alapján terjesztjük ki. Ha p és q egész, $q \neq 0$, például $2^{p/q}$ hatványt q-adik hatványra emeléssel könnyen vissza lehet vezetni egész kitevős hatványra, s így a célszerű definíció: $2^{p/q} = \sqrt[q]{2^p}$. Itt azonban fellépnek már értelmezési nehézségek. Nem szoktunk negatív kitevőjű gyököket alkalmazni (bár vannak országok, ahol ezt megteszik), de ezen könnyen lehet segíteni: $p < 0$ és $q < 0$, illetve $p > 0$ és $q < 0$ esetén $\dfrac{p}{q} = \dfrac{-p}{-q}$ miatt el lehet érni, hogy a gyökkitevő pozitív legyen. Nagyobb gond van a $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ definíciójával, ha $a < 0$, p páratlan és q páros, mert a jobb oldalon álló kifejezésnek nincs értelme a valós számok halmazán. Másrészt $a^{p/q} = a^{(2p)/(2q)} = \sqrt[2q]{a^{2p}}$, tehát valós szám. Tehát vagy el kellene fogadnunk, hogy a törtkitevő nem bővíthető, ami aligha lenne célszerű, vagy le kellene mondanunk a negatív alap racionális kitevőjű hatványainak értelmezéséről (ha a racionális kitevő nem egész). Az utóbbit szoktuk tenni. A különböző alapok esetén exponenciális függvényeink a legbővebb értelmezési tartományon a következő grafikonokat adják *(3.ábra)*:



3. ábra

Részletesen vizsgálva függvényeinket, megállapíthatjuk, hogy közülük szigorúan monoton nő a^x, ha $a > 1$, szigorúan monoton fogy, ha $0 < a < 1$, konstans értékű, ha $a = 0$ vagy $a = 1$, nem monoton, de kölcsönösen egyértelmű, ha $-1 < a < 0$ vagy $a < -1$, nem monoton s nem is kölcsönösen egyértelmű, ha $a = -1$.

Az irracionális kitevőjű hatvány célszerű jelentését keresve az előbbi azonosságok alkalmazásával nem tudjuk a feladatot racionális kitevőjű hatványra visszavezetni.

$2^{\sqrt{2}} \cdot 2^q = 2^{\sqrt{2}+q}$ (ha q racionális, $q + \sqrt{2}$ irracionális),

$(2^{\sqrt{2}})^q = 2^{q\sqrt{2}}$ ($q\sqrt{2}$ racionális q esetén vagy 0, és akkor érdektelen, vagy irracionális).

Itt a monotonitás megmaradását érdemes megkövetelnünk. Meg lehet mutatni, hogy ekkor az azonosságok is megmaradnak.

Ha r irracionális szám, tekintsük a racionális számokból álló $q_n \to r$ számsorozatokat, akkor $a > 0$ esetén az a^{q_n} sorozat konvergens, és legyen $\lim_{n\to\infty} a^{q_n} = a^r$. (Meg kell követelnünk, hogy a ne lehessen negatív, hiszen negatív alapnak csak egész kitevőjű hatványait sikerült értelmeznünk, s a q_n sorozat nem állhat csupa egész számból). $a = 0$ esetén nincs probléma, ha q_n elemei pozitív számok, tehát a 0 pozitív irracionális kitevőjű hatványait is értelmezni tudjuk. Sőt, lehetővé válik 0^0 határértékkel való definíciója is. (Ez azonban az irodalomban eltérő eredményekhez is vezet. Ha t.i. 0^{q_n} (q_n pozitív racionális) sorozatot választjuk, ennek határértéke 0. Viszont

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ ln\ x} = \lim_{x\to+0} e^{ln\ x/\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} e^{-x} = 1.$$

Általában inkább az utóbbi az elfogadott.)

Összefoglalva tehát:

minden valós kitevőre értelmeztük az $x \mapsto a^x$ függvényt, ha

(1) $a > 1$, ekkor a függvény szigorúan monoton nő,

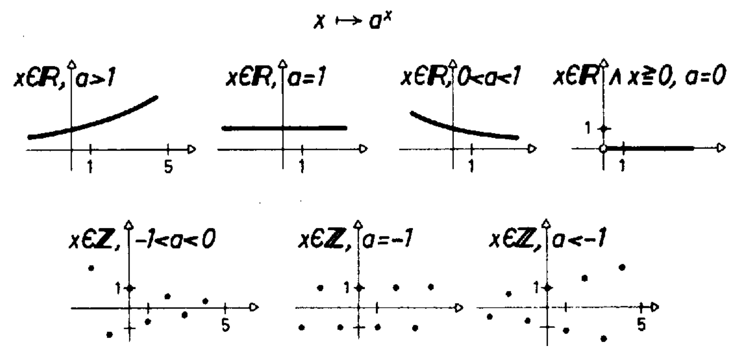
(2) $a = 1$, ekkor a függvény konstans,

(3) $0 < a < 1$, ekkor a függvény szigorúan monoton csökken, minden pozitív valós kitevőre (és 0 kitevőre) értelmeztük

(4) $a = 0$ esetén, a függvényérték pozitív kitevőre 0 (0 kitevőre az értéke 1); egész kitevőkre értelmeztük az $x \mapsto a^x$ függvényt, ha

$\left.\begin{array}{l}(5)\ \ -1 < a < 0,\\ (7)\ \text{vagy } a < -1,\end{array}\right\}$ ekkor a függvény kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, a grafikon pontjai diszkrét pontok, a pontsor „tartója” páros kitevőre $(-a)^x$, páratlan kitevőre $-(-a)^x$ grafikonja;

(6) $a = -1$, ekkor a függvény páros helyeken 1, páratlan helyeken -1 értéket vesz fel. A különböző alapú exponenciális függvényeket az alaptól függően legbővebb értelmezési tartományukon a 4.*ábra* szemlélteti.



4. ábra

Lássunk néhány példát:

1. $(-2)^x > 5,\ x$ csak egész lehet és páros; teljesül, ha $x \geq 4$.

   $(-2)^x > -7,\ x$ csak egész lehet; igaz, ha $x < 3,$ vagy $x > 3$ és páros.

   $(-0,5)^x < 2,\ x$ csak egész lehet; teljesül, ha $x \leq -1$ és páratlan,vagy $x \geq 0$.

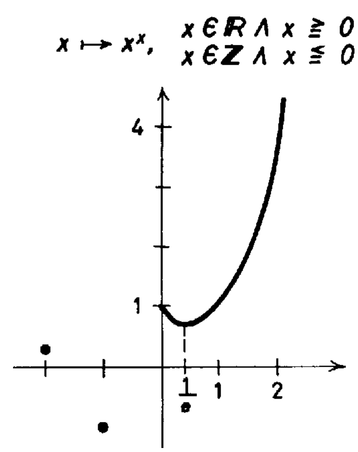
   $(-0,5)^x > -1,\ x$ csak egész lehet; igaz, ha $x \geq 0,$ vagy $x < 0$ páros .

Érdemes szemügyre vennünk az $x \mapsto x^x$ függvényt a legbővebb értelmezési tartományán. A gondot az értelmezési tartomány okozza: $x > 0$ esetén a kitevő bármely valós szám lehet, $x < 0$ esetén csak egész szám. $x = 0$ pontban nincs helyettesítési érték, viszont van jobb oldali határérték, ami 1. (Ezért célszerű 0^0-t az x^x függvény jobb oldali határértékével definiálni.)

Vizsgáljuk meg a függvény menetét. A pozitív számok halmazán – némileg meglepő módon – a függvény előbb monoton fogy, majd helyi minimum után végig szigorúan nő:

$$f(x) = x^x \quad (x > 0), \quad \text{így}$$
$$f(x) = e^{x\ ln\ x}, \qquad f^{'}(x) = e^{x\ ln\ x}(\ln\ x + 1),$$
$$\ln\ x + 1 < 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < \frac{1}{e}, \quad \text{ekkor} \quad f(x) \text{ fogy;}$$
$$\ln\ x + 1 > 0, \quad \text{ha} \quad x > \frac{1}{e}, \quad \text{ekkor} \quad f(x) \text{ nő;}$$

helyi minimumát felveszi, ha $x = \dfrac{1}{e}$ *(5.ábra).*



5. ábra

Mindenesetre, ha $0 < x < 1,\ f(x) < 1$, bár ezen az intervallumon nincs kölcsönös egyértelműség. Viszont $x > 1/e$ vagy $x < 0$ esetén már van, bár a függvény csak $x > 1/e$ esetén szigorú monoton növő. (Szép példa arra, hogy a szigorú monotonitás a kölcsönösen egyértelműségnek elégséges, de nem szükséges feltétele.)

Némileg másképpen alakul a helyzet, ha a $g(x) = (x-1)^{x+1}$ függvényt elemezzük a lehető legbővebb értelmezési tartományán. Ez: az 1-nél nagyobb valós számok, 1 és az 1-nél kisebb egész számok.

Ha $x - 1 > 1$, azaz $x > 2$, akkor a kitevő $x + 1 > 3$;

1-nél nagyobb számok 3-nál nagyobb hatványai mind nagyobbak 1-nél.

Ha $x - 1 = 1$, azaz $x = 2$, akkor $x + 1 = 3$, a függvény értéke 1.

Ha $0 < x - 1 < 1$, azaz $1 < x < 2$, akkor $2 < x + 1 < 3$;

0 és 1 közötti számok 2 és 3 közé eső hatványai pozitívak és kisebbek 1-nél.
Ha $x-1=0$, azaz $x=1$, a kitevő 2, a függvény értéke 0.
Ha $x-1<0$, azaz $x<1$, g csak akkor van értelmezve, ha x egész szám.

Lássunk további példákat.

2. Oldjuk meg az $(x-1)^{x^2-4x}=1$ egyenletet.
Ha $x-1>1$, azaz $x>2$, a kitevő 0 kell legyen, ez a megengedett kiindulási halmazon $x=4$.
Ha $x-1=1$, azaz $x=2$, a kitevő a kiindulási halmaz tetszőleges eleme, de mert az egyelemű, $x=2$.
Ha $0<x-1<1$, azaz $1<x<2$, a kitevő 0 kellene, hogy legyen, de a kiindulási halmaznak nincs ilyen eleme.
Ha $x-1=0$, azaz $x=1$, a kitevő pozitív kellene legyen, tehát nincs megoldás.
Ha $-1<x-1<0$, azaz $0<x<1$, a kitevő egész és 0 értékű, a kiindulási halmazon nincs megoldás.
Ha $x-1=-1$, azaz $x=0$, a kitevő páros egész, tehát $x=0$.
Ha $x-1<-1$, azaz $x<0$, a kitevő egész és 0 értékű, a kitevőnek a kiindulási halmazon nincs 0 helye. Végül is az egyenlet megoldásai: $x=2$ és $x=0$.

3. Oldjuk meg az $(x-1)^{x^2+4x}=(x-1)^{2x+24}$ egyenletet.
Ha az alap pozitív és $\neq 1$, azaz $x>2$, illetve $1<x<2$ esetben a kitevők tetszőleges, egymással egyező valós számok: $x^2+4x=2x+24$, azaz $(x-4)\cdot(x+6)=0$, tehát $x=4$.
Ha az alap 1, azaz $x=2$, a függvény konstans, az egyenlőség a kitevőktől függetlenül teljesül, $x=2$.
Ha az alap 0, tehát $x=1$, a kitevő tetszőleges pozitív szám, $x=1$ esetén $x^2+4x>0$ és $2x+24>0$, tehát $x=1$.
Ha $-1<x-1<0$ vagy $x-1<-1$, azaz $0<x<1$ vagy $x<0$, a kitevő csak egész lehet, az ilyen alapú exponenciális függvény egyértelmű, tehát az egyenlőség teljesüléséhez a kitevőknek meg kell egyezni: ezen a kiindulási halmazon egy ilyen gyök van: $x=-6$.
Ha $x-1=-1$, azaz $x=0$, a kitevőknek egészeknek kell lenni és egyező párosságúnak, mivel ez teljesül, $x=0$ megoldás.
Az egyenlet gyökei a valós számok halmazán: $4, 2, 1, 0, -6$. Igazságuk behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető.

4. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget: $(x^2-9x+18)^{x^2-12x+32}<1$.
Ha az alap nagyobb 1-nél, akkor $\left\{x<\dfrac{9-\sqrt{13}}{2} \quad \text{vagy} \quad x>\dfrac{9+\sqrt{13}}{2}\right\}=K_1$.
Ilyen alap esetén az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a kitevő negatív: $x^2-12x+32<0$, azaz, ha $\{4<x<8\}=F_1$.
A megoldás első részhalmaza a két halmaz közös része:

$$M_1=\left\{\frac{9+\sqrt{13}}{2}<x<8\right\}.$$

Ha az alap értéke 1, az egyenlőtlenség nem teljesülhet: $M_2=\emptyset$.
Ha $0<x^2-9x+18<1$, az egyenlőtlenség akkor igaz, ha a kitevő értéke pozitív.

$$x^2-9x+18>0, \quad \text{ha} \quad x<3 \quad \text{vagy} \quad x>6,$$
$$x^2-9x+18<1, \quad \text{ha} \quad \frac{9-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{9+\sqrt{13}}{2}.$$

Tehát a kiindulási halmaz:

$$K_3=\left\{\frac{9-\sqrt{13}}{2}<x<3 \quad \text{vagy} \quad 6<x<\frac{9+\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

Most a megoldás feltétele, hogy ezen a halmazon

$$x^2-12x+32>0, \quad \text{azaz} \quad \{x<4 \text{ vagy } x>8\}=F_3.$$

$$\text{Tehát} \quad M_3=\left\{\frac{9-\sqrt{13}}{2}<x<3\right\}.$$

Ha az alap értéke 0, az egyenlőtlenség teljesül, ha a kitevő pozitív valós szám.
$x^2-9x+18=0$, ha $x=3$ vagy $x=6$. Közülük a kitevő akkor pozitív, ha $x=3$, tehát $M_4=\{x=3\}$.

Ha az alap értéke -1 és 0 között van, az egyenlőtlenség értelmezve van, ha a kitevő egész, és teljesül is, ha a kitevő pozitív egész, vagy negatív páratlan egész.

$$x^2-9x+18<0, \quad \text{ha} \;\; 3<x<6$$

$$x^2-9x+18>-1, \quad \text{ha} \;\; x<\frac{9-\sqrt{5}}{2} \text{ vagy } x>\frac{9+\sqrt{5}}{2}.$$

A K_5 kiindulási halmaz a kettő közös része:

$$K_5=\left\{3<x<\frac{9-\sqrt{5}}{2} \text{ vagy } \frac{9+\sqrt{5}}{2}<x<6\right\}.$$

A kitevőben szereplő kifejezés: $x^2-12x+32=(x-6)^2-4$, pozitív értékű, ha $x<4$ vagy $x>8$, vagyis a kitevő a kiindulási halmaznak $3<x<\frac{9-\sqrt{5}}{2}$ részhalmazán pozitív. Mivel ez az intervallum a másodfokú függvény szigorúan monoton csökkenő részén helyezkedik el, a kitevő értékkészletére $2,85<x^2-12x+32<5$, tehát ha a kitevő pozitív egész, értéke csak 3 vagy 4 lehet. Az $x^2-12x+32=3$ egyenletnek K_5-be eső gyöke $x=6-\sqrt{7}$, az $x^2-12x+32=4$ egyenletnek K_5-be eső gyöke $x=6-2\sqrt{2}$, s mivel $\frac{9+\sqrt{5}}{2}<x<6$ feltétellel a kitevő nem lesz negatív páratlan, tehát $M_5=\left\{x=6-\sqrt{7} \text{ vagy } x=6-2\sqrt{2}\right\}$.

Ha $x^2-9x+18=-1$, az egyenlőtlenség értelmezve van, ha a kitevő értéke egész szám, és teljesül, ha a kitevő páratlan. $x^2-9x+18=-1$, tehát

$$K_6=\left\{x=\frac{9+\sqrt{5}}{2} \text{ vagy } x=\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Ezeket az $x^2-12x+32$ polinomba helyettesítve a helyettesítési érték $-1\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$, tehát nem egész szám. Ezen a részhalmazon a megoldási halmaz üres.

Ha $x^2-9x+18<-1$, az egyenlőtlenségben szereplő kifejezés értelmezve van, ha a kitevő helyettesítési értéke egész szám, és az egyenlőtlenség teljesül, ha a kitevő negatív egész, vagy pozitív páratlan egész.

$$x^2-9x+18<-1, \quad \text{ha} \;\; \frac{9-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{9+\sqrt{5}}{2};$$
$$\text{a kitevő negatív, ha } 4<x<8, \text{ tehát}$$
$$K_7^{'}=\left\{4<x<\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right\}, \qquad K_7^{''}=\left\{\frac{9-\sqrt{5}}{2}<x<4\right\}.$$

Mivel K_7 a kitevőt adó $(x-6)^2-4$ függvény szigorúan monoton csökkenő szakaszára esik, s a kitevőnek ezen az intervallumon a negatív értékei -4 és 0 között vannak, a kitevő lehetséges értékei $-1,-2$ és -3. A kitevő ezeket az értékeket rendre a $6-\sqrt{3}, 6-\sqrt{2}$ és 5 helyeken veszi fel. A kitevő pozitív a $\frac{9-\sqrt{5}}{2}<x<4$ intervallumon. Itt a kitevő szigorúan monoton fogy, értékkészlete $0<x^2-12x+32<0,5+1,5\sqrt{5}\sim 2,8$. Így a kitevő akkor pozitív páratlan egész, ha értéke 1. Ezt a kitevő az $x=6-\sqrt{5}$ helyen veszi fel.Tehát

$$M_7=\left\{6-\sqrt{3},\ 6-\sqrt{2},\ 5,\ 6-\sqrt{5}\right\}.$$

Összefoglalva a feladat megoldásai:

$$\frac{9+\sqrt{13}}{2}<x<8 \text{ vagy } \frac{9-\sqrt{13}}{2}<x<3, \quad \text{továbbá}$$
$$x=3, \quad x=5, \quad x=6-2\sqrt{2}, \quad x=6-\sqrt{7}, \quad x=6-\sqrt{3}, \quad x=6-\sqrt{2}, \quad x=6-\sqrt{5}.$$