I. megoldás. Végezzük el a következő átalakítást:

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = (a_1-a_2)(b_1-b_2)+$$
$$+(a_1-a_3)(b_1-b_3)+\ldots+(a_1-a_n)(b_1-b_n)+$$
$$+(a_2-a_3)(b_2-b_3)+\ldots+(a_2-a_n)(b_2-b_n)+\ldots+$$
$$+(a_{n-1}-a_n)(b_{n-1}-b_n).$$

A zárójeleket mindkét oldalon felbontva, meggyőződhetünk róla, hogy az egyenlőség helyes. Feltételünk szerint a jobb oldali összeg egyik tagja sem lehet negatív, amivel az állítást máris igazoltuk. Könnyen ellenőrizhetjük a fenti átalakítás alapján, hogy egyenlőség akkor és csak akkor lép fel, ha az $a_1 = \ldots = a_n$ és a $b_1 = \ldots = b_n$ egyenlőségláncoknak legalább egyike teljesül.

A bizonyításból az is látszik, hogy monoton csökkenő sorozatok esetében is igaz az egyenlőtlenség, ha pedig az a_n sorozat monoton növő, és a b_n csökkenő, akkor az egyenlőtlenség iránya megfordul.

II. megoldás. Legyen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ a $b_1, \ldots, b_n$ sorozat egy tetszőleges permutációja. Belátjuk, hogy ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{1}$$

Ha valamely $i<j$ indexpárra $c_i > c_j$, akkor a $\sum_{k=1}^{n} a_k c_k$ összegben cseréljük fel c_i-t és c_j-t egymással. Ezzel az összeg értéke biztosan nem csökken, hiszen $(a_j-a_i)(c_i-c_j) \geqq 0$ miatt $a_ic_i+a_jc_j \leqq a_ic_j+a_jc_i$. Véges sok csere végrehajtásával a $c_1, \ldots, c_n$ számok olyan $d_1, \ldots, d_n$ permutációjához jutunk, amelyben $i<j$ már $i<j$ esetén $d_i \leqq d_j$ teljesül minden indexpárra. Ekkor persze $b_i = d_i$ minden $i = 1, \ldots, n$-re, és mivel a végrehajtott cserék során az összeg értéke egyetlen lépésnél sem csökkent, valóban fennáll az (1) egyenlőtlenség.

Ezek alapján már könnyen következik a feladat állítása.

A $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ összegbe írjuk be a $b_1, \ldots, b_n$ számok valamennyi ciklikus permutációját, így a fentiek szerint

$$a_1b_k + a_2b_{k+1} + \ldots + a_nb_{k-1} \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva a feladat állítását nyerjük. Könnyen látható, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha $a_1 = \ldots = a_n$ és $b_1 = \ldots = b_n$ egyike teljesül.

Jakab Tibor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Jelöljük az $a_1, a_2, \ldots, a_n$, illetve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ szám-n-eseket a-val, b-vel, a bizonyított egyenlőtlenség jobb és bal oldalának a különbségét $C(a,b)$-vel:

$$C(a,b) = n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right),$$

az a_i, b_i számok átlagát pedig $\overline{a}$-sal, $\overline{b}$-sal:

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad \overline{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$C(a,b) = n\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})(b_i-\overline{b}), \tag{2}$$

ugyanis

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a})(b_i-\overline{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i - a_i\overline{b} - \overline{a}b_i + \overline{a}\cdot\overline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i - \overline{b}\sum_{i=1}^{n} a_i - \overline{a}\sum_{i=1}^{n} b_i + n\overline{a}\cdot\overline{b},$$

és itt az utolsó három tag mindegyike egyenlő $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$-vel. A $C(a,b)$-nek (2) alakjából látszik, hogy ha akár az a_i, akár a b_i számokat ugyanazzal a számmal megnöveljük, $C(a,b)$ értéke változatlan marad. Ennek alapján is bizonyítható a feladatban szereplő egyenlőtlenség n szerinti indukcióval, a mondott eltolással el lehet ugyanis érni, hogy $a_1 = b_1 = 0$ legyen.

Ha speciálisan $a = b$, a $C(a, b) \geqq 0$ egyenlőtlenség közvetlenül kiolvasható a (2) előállításból. A $C(a, a)$ szám azt mutatja meg, mennyire szóródnak az a_i számok az $\overline{a}$ átlag körül, ezért a matematikai statisztikában ezt a mennyiséget széles körben használják. Maga a $C(a, b)$ mennyiség az a_i, b_i számok változásainak kölcsönhatását mutatja, pozitív C inkább az egyirányú, negatív C az ellentétes irányú változásokra utal. Például ha a_i az osztály i-ik tanulójának a magassága, b_i pedig a súlya, és a tanulókat eleve a magasságuk szerint állítottuk sorba, tehát $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ (ahol n az osztály létszáma), ha a $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ egyenlőtlenség általában nem is teljesül, $C(a, b)$ értéke az esetek többségében mégis pozitív. Ezért ezt a mennyiséget a statisztikában az a, b mennyiségek kölcsönhatásának a mérésére használják, és az a, b számok kovarianciájának nevezik. (Pontosabban mondva a $C(a, b)$ szám $n(n-1)$-ed része a kovariancia.) Mivel ez a szám még nagy mértékben függ az $a_i b_i$ számok mérésénél használt egységtől, többet mond nála az

$$R(a, b) = \frac{C(a, b)}{\sqrt{C(a, a) \cdot C(b, b)}}$$

hányados, melyet korrelációs együtthatónak neveznek. Belátható, hogy $-1 \leqq R(a, b) \leqq 1$, és $\left|R(a, b)\right| = 1$ akkor és csakis akkor teljesül, ha van olyan λ és μ, amelyekkel $b_i = \lambda a_i + \mu$ teljesül minden i-re. Ha az a_i, b_i számpárokat egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk, a kapott pontokhoz bizonyos értelemben legjobban simuló egyenes egyenlete

$$y - \overline{b} = \lambda(x - \overline{a}), \tag{3}$$

ahol

$$\lambda = \frac{C(a, b)}{C(a, a)}$$

az ún. regressziós együttható. Az érdeklődő olvasónak gyakorlásul javasoljuk, hogy a környezetében található összetartozó a_i, b_i számpárokat gyűjtse össze, ábrázolja, és rajzolja meg hozzájuk a (3) egyenletű egyenest. Ha az a_i számok az idő múlását mérik, és a b_i számok valamilyen időben lezajló jelenséggel kapcsolatosak, a kapott egyenes jól tükrözi a jelenségnek a vizsgált időszakban megmutatkozó fő tendenciáját, szokásos kifejezéssel élve, a jelenség trendjét. Ennek segítségével vizsgálhatjuk például a termelés különböző mutatóinak az alakulását, és e vizsgálatok alapján határozhatjuk meg e mutatók jövőbeni viselkedését is.