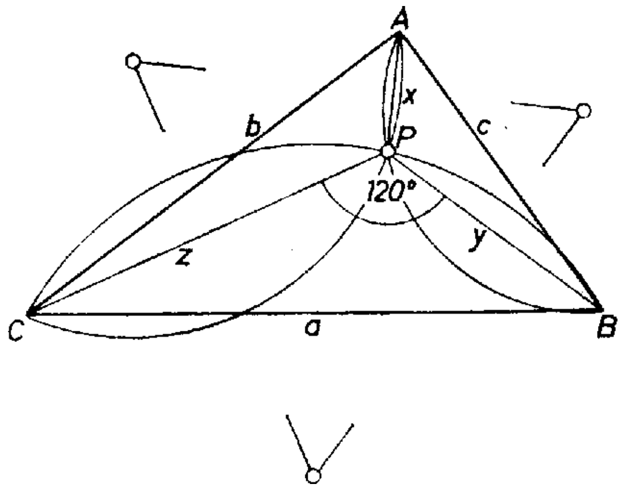
I. megoldás. Legyen az ABC háromszögben $BC=a=79, CA=b=65, AB=c=47$ egység, a szóban forgó pont P, és $PA=x$, $PB=y$, $PC=z$. Pontunk semmiféle háromszög esetében sem lehet kívül a háromszögön, különben ugyanis két oldal látószöge együtt egyenlő lenne a harmadik látószöggel, akár valamelyik szög csúcstartományában próbálnánk fölvenni P-t, akár valamelyik oldalával szomszédos, végtelenbe nyúló ún. serpenyőtartományában; így pedig nem lehet egyenlő a három látószög. Hasonlóan nem lehet P a háromszög kerületén sem.

Eszerint a látószögek összege 360°, és mindegyiknek 120° az értéke, és P-t szerkesztéssel úgy kapjuk, hogy vesszük két oldalszakasz 120°-os nyílású látókörívét azon a partjukon, amelyikben a háromszög van, ezek közös pontja P. (1. ábra.)



1. ábra

Alkalmazzuk a cosinustételt egymás után a PBC, PCA, PAB háromszögnek P-vel szemben levő oldalára. A P-nél levő szög cosinusa mindegyikben $(-0,5)$, így

(1) $$x^2+y^2+xy=c^2,$$

(2) $$y^2+z^2+yz=a^2,$$

(3) $$z^2+x^2+zx=b^2.$$

Vonjunk ki egyrészt (2)-ből (3)-at, másrészt (3)-ból (1)-et:

(4) $$y^2-x^2+z(y-x)=(y-x)(x+y+z)=a^2-b^2,$$

(5) $$z^2-y^2+x(z-y)=(z-y)(x+y+z)=b^2-c^2.$$

Itt célszerű feladnunk az általános megoldás keresését, ugyanis az oldalak adott mértékszámai jelentős könnyítést adnak azzal, hogy legutóbbi két egyenletünk jobb oldala egyenlő:

$$a^2-b^2=79^2-65^2=2016=65^2-47^2=b^2-c^2.$$

Így (4) és (5) bal oldalainak egyenlőségéből $x+y+z>0$ miatt

$$y-x=z-y>0,$$

vagyis x, y és z ebben a sorrendben növekvő számtani sorozatot alkot. Ezért a három ismeretlen összege (4)-ben és (5)-ben $3y$, ezt és a számadatokat behelyettesítve

$$y-x=z-y=\frac{2016}{3y}=\frac{672}{y}.$$

Innen a sorozat mindkét szélső tagja kifejezhető a középsővel:

(6) $$x=y-\frac{672}{y}=\frac{y^2-672}{y},\ z=y+\frac{672}{y}=\frac{y^2+672}{y},$$

és ezeket (3)-ba helyettesítve y^2-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$(y^2+672)^2+(y^2-672)^2+(y^4-672^2)=(65\,y)^2,$$
$$3y^4-65^2y^2+672^2=0,$$
$$y^2=\frac{1}{6}\left(4225\pm\sqrt{12\,431\,617}\right)=\begin{cases}1291{,}8,\\ 611{,}5.\end{cases}$$

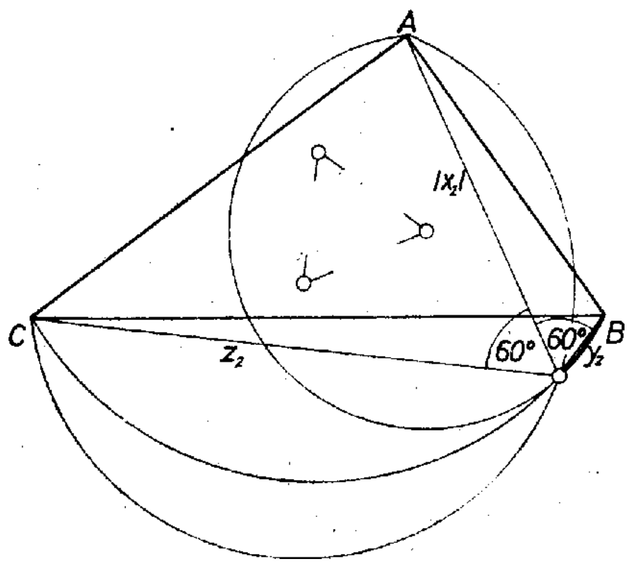
Természetesen elég vennünk y pozitív értékeit:

$$y_1 = 35{,}94, \qquad y_2 = 10{,}79.$$

A (6)-ba leendő behelyettesítés céljára $672/y_1 = 18{,}70$, $672/y_2 = 62{,}26$, és az előbbi alapján a keresett távolságok:

$$x = PA = 17{,}24, \quad y = PB = 35{,}94, \quad z = PC = 54{,}61 \text{ egység.}$$

A másik megoldás: $x_2 = -51{,}46$, $y_2 = 10{,}79$, $z_2 = 73{,}04$, ha x_2 abszolút értékét vesszük, szintén meghatározza a sík egy P_2 pontját (2. ábra).



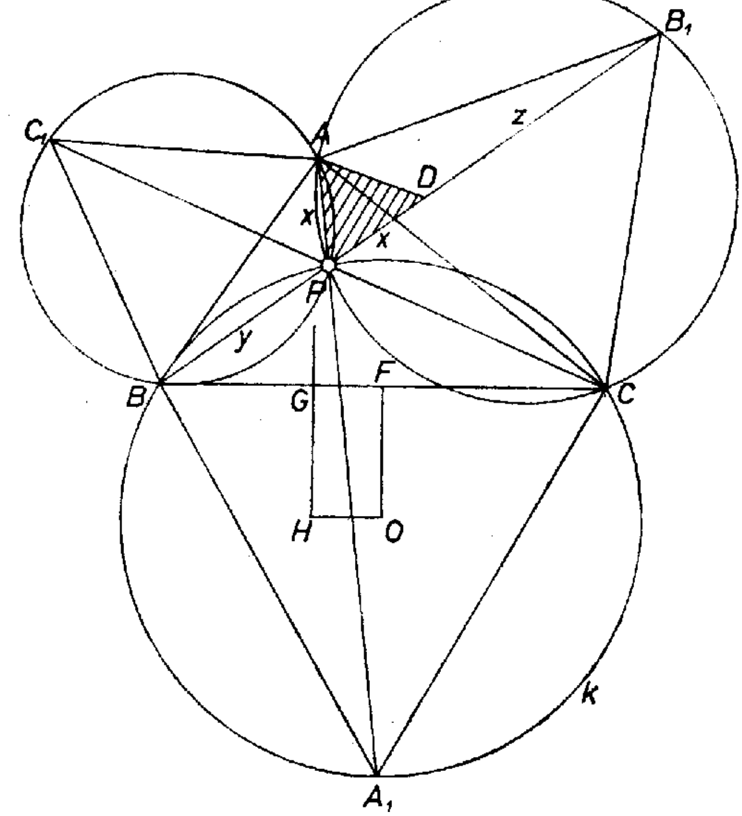
2. ábra

Előre tudjuk, hogy ez nem felel meg feladatunk geometriai kérdésének, de hozzátehetjük: így az AB és AC oldalak látószögének cosinusa (1) ill. (3) szerint $+0{,}5$, e két látószög 60°, a BC oldalé 120°, amazok összege. P_2 annak a 3 körívnek a közös pontja, amelyek az 1. ábrabelieknek tükörképei a megfelelő oldalra. (Eszerint x_2-t alaposabb indokolással mellőztük, mint a két y^2 érték negatív négyzetgyökét. Egyébként e negatív négyzetgyökökkel x és z csupán előjelet változtatnak, és ismét az eddigi két megoldásra jutunk.)

Megjegyzés. A talált P pontot a látószögek egyezése alapján tetszőleges ABC háromszögben a háromszög izogonális pontjának nevezik.

II. megoldás. Illesszünk a vizsgált háromszög oldalaihoz kifelé szabályos háromszögeket, és jelöljük ezek A-val, B-vel, C-vel szemközti csúcsait rendre A_1-gyel, B_1-gyel, C_1-gyel. Ha az eredeti háromszög A-nál levő szöge kisebb 120°-nál, akkor az AC egyenest AB-n keresztül AC_1-be vivő forgatás kisebb 180°-nál, tehát C_1 az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint B. Ha az ABC szög is kisebb 120°-nál, akkor C_1 a BC egyenesnek is ugyanazon az oldalán van, mint az eredeti háromszög, tehát a CC_1 szakasz metszi az AB oldalt. Ha pedig az eredeti háromszög minden szöge kisebb 120°-nál, akkor ugyanígy kapjuk az AA_1, BB_1 szakaszokra, hogy metszik a szemközti oldalt, tehát rendre egymást is metszik. Megmutatjuk, hogy ekkor e három szakasz egy ponton megy át, és ez a keresett P pont.

Forgassuk el az ABB_1 háromszöget A körül úgy, hogy B a C_1-be kerüljön. Akkor a B_1 a C-be megy át, tehát a BB_1, CC_1 szakaszok M metszéspontjából az AB, BC oldalak 120°-os szög alatt látszanak. Eszerint M rajta van az I. megoldás elején említett két 120°-os látókörön, tehát valóban azonos P-vel. Mivel ez a CC_1, AA_1, valamint az AA_1, BB_1 szakaszok metszéspontjáról is elmondható, mindhárom szakasz átmegy P-n.



Mérjük fel a PB_1 szakaszra P-ből kiindulva a $PD = PA = x$ szakaszt. Mivel $APB_1\sphericalangle = 60^\circ$, az APD háromszög szabályos, így $AD = x$. Forgassuk el A körül az APC háromszöget 60°-kal úgy, hogy P a D-be kerüljön, akkor C a B_1-be jut, tehát $DB_1 = PC = z$. Ezek szerint

$$BB_1 = BP + PD + DB_1 = y + x + z = w,$$

és hasonlóan kapjuk, hogy $AA_1 = CC_1 = w$.

Jelöljük az A_1BC háromszög köré írt kört k-val, középpontját O-val, sugarát r-rel. Könnyen látható, hogy $r = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Alkalmazzuk a körhöz külső pontból húzott szelő darabjaira vonatkozó tételt a k kör AA_1 szelőjére, kapjuk, hogy

$$x \cdot w = \overline{AP} \cdot \overline{AA_1} = \overline{AO^2} - r^2.$$

Az AO szakasz hosszát meghatározhatjuk abból a derékszögű háromszögből, amelynek AO az átfogója, és az O-hoz csatlakozó befogója párhuzamos BC-vel. Ennek másik befogója az eredeti háromszög A-beli magasságvonalán van, jelöljük ennek BC-n levő pontját G-vel, a derékszög csúcsát H-val, BC felezőpontját F-fel, AG-t m-mel, FG-t d-vel:

$$\overline{AO^2} = \overline{AH^2} + \overline{HO^2} = \left(m + \frac{r}{2}\right)^2 + d^2 = (m^2 + d^2) + rm + \frac{r^2}{4} = \overline{AF^2} + \frac{am}{\sqrt{3}} + \frac{a^2}{12}.$$

Használjuk még fel, hogy az AF súlyvonalra

$$\overline{AF^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

teljesül, kapjuk, hogy

$$xw = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{3} = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},$$

ahol $t = \dfrac{1}{2}\, a \cdot m$ a háromszög területe.
Hasonlóan kapjuk, hogy

$$yw = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad zw = \frac{2t}{\sqrt{3}} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2},$$

tehát

$$w^2 = (x + y + z)w = 2\sqrt{3}t + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Ebből négyzetgyökvonással kapjuk w értékét, és ezt az xw, yw, zw szakaszokra vonatkozó összefüggésekbe helyettesítve kapjuk az x, y, z távolságokat. Ha – mint esetünkben – az eredeti háromszögben a három oldal nagysága adott, akkor t értékét a Heron-képletből számíthatjuk.

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{191 \cdot 33 \cdot 61 \cdot 97} = 1526{,}74,$$

tehát

$$\begin{aligned} xw &= 1859{,}43 \\ yw &= 3875{,}43 \\ zw &= 5891{,}43 \\ w &= 11626{,}29 = 107{,}83 \\ x &= 17{,}24; \quad y = 35{,}94; \quad z = 54{,}64. \end{aligned}$$

Számolás közben láttuk, hogy mindegyik oldal négyzete kisebb a másik két oldal négyzetének összegénél, így a vizsgált háromszög hegyesszögű. Emiatt az elmondottak érvényesek rá, a P pont létrejön, és a kapott eredmények helyesek.