Mivel a $\sin x$ függvény értékkészlete a zárt $[-1,\, 1]$ intervallum, $|a_1| = |\sin a_0| \leq 1$. Jelöljük $|a_1|$-et x_1-gyel, és x_1-ből kiindulva állítsuk elő az

$$(1) \qquad x_{n+1} = \sin x_n, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

rekurzióval definiált sorozat tagjait. Ha $a_1 \geq 0$, akkor az a_n és x_n sorozatok azonosak, ha pedig $a_1 < 0$, akkor $\sin(-x) = -\sin x$ miatt $a_n = -x_n$. Megmutatjuk, hogy ha $0 \leq x_1 \leq 1$, akkor az x_n sorozat konvergens, és a határértéke 0, amiből a fentiek alapján következik, hogy a_n is konvergens, és a határétéke 0.

Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $0 \leq \sin x \leq 1$, tehát ha $0 \leq x_n \leq 1$, akkor (1) szerint $0 \leq x_{n+1} \leq 1$, így

$$(2) \qquad 0 \leq x_n \leq 1, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Mivel a $0 \leq x \leq 1$ szakaszon $\sin x < x$, az x_n sorozat monoton fogy. Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy a 0 nem határértéke a sorozatnak. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám, amelyhez és tetszőleges n természetes számhoz található olyan $N \geq n$ index, melyre

$$(3) \qquad |x_N - 0| \geq \varepsilon$$

teljesül. (2) szerint $x_N > 0$, tehát (3) szerint $x_N \geq \varepsilon$. Mivel a sorozat monoton fogy, ebből következik, hogy $x_k \geq \varepsilon$ minden $k \leq N$ indexre, nevezetesen minden $k \leq n$ indexre. Mivel itt n tetszőleges, azt kaptuk, hogy

$$(4) \qquad x_n \geq \varepsilon, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots .$$

Megmutatjuk, hogy a $0 < x \leq 1$ szakaszon az

$$(5) \qquad f(x) = x - \sin x$$

függvény monoton nő. Valóban, a függvény deriváltja[1] ezen a szakaszon pozitív:

$$f'(x) = 1 - \cos x > 0.$$

Emiatt (4) esetén

$$x_n - x_{n+1} = f(x_n) > f(\varepsilon) > 0$$

teljesülne tetszőleges n-re, amiből

$$x_1 > x_1 - x_{n+1} = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \ldots + (x_n - x_{n+1}) > nf(\varepsilon)$$

következne, ami nyilván nem lehet, hiszen $f(\varepsilon) > 0$ miatt itt a jobb oldal tetszőlegesen nagy lehet, x_1 viszont egy adott szám.

Ezzel beláttuk, hogy ellentmondásra vezet az a feltétel, hogy az x_n sorozat nem konvergál 0-hoz, tehát x_n konvergens, és a határértéke 0.

Megjegyzés. Megoldásunkban az indirekt feltétel nem az volt, hogy x_n konvergens, de nem 0 a határértéke, hanem az, hogy nem igaz az, hogy x_n konvergens, és 0 a határértéke. Ami azt jelenti, hogy x_n vagy nem konvergens, vagy konvergens, de nem 0 a határértéke. Általában, ha egy sorozat monoton fogy, és alulról korlátos, akkor konvergens is – mi azonban nem akartuk felhasználni megoldásunkban ezt a tételt, hiszen nem szerepel a középiskolai tananyagban.

[1] Lásd F 1989. megoldását ezen számban.