1990. áprilisában izraeli meghívásra négy magyar diák kétnapos matematikaversenyen vett részt Izraelben. A magyar küldöttség a februárban rendezett kétnapos olimpiai válogatóverseny első négy helyezettjeként az alábbi diákokból állt:

Balogh József, a szegedi Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium IV. osztályos tanulója;
Matolcsi Máté, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium II. osztályos tanulója;
Kondacs Attila, a budapesti Árpád Gimnázium IV. osztályos tanulója;
Czirók András, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium III. osztályos tanulója.

Vendéglátónk a világhírű tudományos kutatóintézet, a *Weizmann Institute of Science* volt. A két versenynap közül az első napon négy feladatot tűztek ki, a második napon pedig csapatverseny volt; a négyfős csapatok együtt dolgozhattak az egymásra épülő problémák megoldásán. A két versenynap feladatai a következők voltak.

Az egyéni verseny feladatai:

1. Bizonyítsuk be, hogy nincsenek olyan pozitív egész x, y számok, amelyekre

$$x^2 + y + 2 \text{ és } y^2 + 4z$$

egy-egy egész szám négyzete. (6 pont)

2. A derékszögű ABC háromszög BC befogójának felezőpontja D, AC befogójának harmadolópontjai E és F, melyekre $AE = EF = FC$. A C-ből induló magasság talppontja G, az A, E, G pontokon átmenő kör középpontja H.

Bizonyítsuk be, hogy az ABC és HDF háromszögek hasonlóak. (6 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1989}{2} - \frac{1988}{3} + \frac{1987}{4} - \ldots - \frac{2}{1989} + \frac{1}{1990} = \frac{1}{996} + \frac{3}{997} + \frac{5}{998} + \ldots + \frac{1989}{1990.}$$

(7pont)

4. Egy téglalap alakú kockás papír minden rácspontjában egy-egy nyilat rajzolunk, párhuzamosan a papír valamelyik oldalával. (A papír szélén levő rácspontokból nem mutathat nyíl a papíron kívülre.)

Bizonyítsuk be, hogy van két szomszédos pont – vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan – , amelyekből ellenkező irányú nyilak indulnak el. (8 pont)

Az egyéni verseny legnehezebb, negyedik feladatának a megoldása:

Az állítást teljes indukcióval fogjuk belátni. Az a meglepő a dologban, hogy ezt a konkrét feladatot képtelenség így kezelni, azonban egy nehezebbnek tűnő általánosabb probléma már megoldható a teljes indukció módszerével.

A feladat nehezítése mindössze annyi, hogy nem téglalapokra látjuk be az állítást, hanem rácsegyenesek mentén kivágott tömör síkidomokra (amelyekben így nincsen „lyuk", és rácsegyenesek határolta egységnégyzetekből állnak). A teljes indukciót n-re, az egységnégyzetek számára végezzük.

Ha $n = 1$, akkor vagy van két olyan nyíl, amelyek egy oldalon elhelyezkedő csúcsokból indulnak, és ellentétes irányúak, vagy nincs, de ekkor a nyilak szerint haladva körbe tudjuk járni a négyzetet, s ez csak úgy lehetséges, ha az egy átlón elhelyezkedő nyilak ellentétes irányba mutatnak.

Tegyük fel, hogy minden, k egységnégyzetet tartalmazó síkidomra igaz a feladat állítása, ahol $k \in 1, 2, \ldots, n$. Ebből a feltevésből kellene belátnunk azt, hogy minden $n+1$ egységnégyzetet tartalmazó síkidomra is igaz az állítás.

Válasszunk ki egy ilyen, $n+1$ egységnégyzetet tartalmazó síkidomban egy tetszőleges rácspontot, s menjünk ebből a pontból abba a rácspontba, amely szomszédos ezzel, s amerre az eredeti rácspontból a nyíl mutat. Így lépegetve a nyilak mutatta irányba sose akadhatunk el, mert minden rácspontból egy másik, a síkidomon belüli rácspontba mutat egy nyíl. Ha ehhez még hozzávesszük, hogy a síkidom véges sok rácspontot tartalmaz, akkor nyilvánvaló, hogy egy idő után olyan rácsponthoz érkezünk, amelynél már voltunk, tehát az utunk bezárul – létrejön egy kör.

Egy ilyen kör határolta S' síkidomból nem mutat kifelé nyíl, tehát ha elhagyjuk az eredeti síkidom körön kívüli részét, akkor a maradék S minden tekintetben eleget tesz a feladat feltételeinek.

Ha S kevesebb mint $n+1$ egységnégyzetet tartalmaz, akkor indukciós feltevésünk szerint készen vagyunk. Még itt kitérek arra az esetre (amivel az indukciós feltevés nem foglalkozik), amikor a kör egy egységnégyzetet sem fog körül, azaz területe 0. Ekkor nyilván a kör két nyílból áll, amelyek egy egységnégyzet egy oldalán helyezkednek el, és egymás felé, azaz ellentétes irányba mutatnak.

Már csak az az eset van hátra, amikor S mind az $n+1$ egységnégyzetet tartalmazza, tehát a kör egybeesik az eredeti síkidom határgörbéjével. Válasszunk ki egy, a határon lévő nyilat, és forgassuk el $90°$-kal úgy, hogy az elforgatott nyíl a síkidom belseje felé mutasson. Ezután forgassuk el az összes nyilat $90°$-kal ugyanilyen irányba (minden nyílon ugyanazt az α forgatást hajtsuk végre)! A határon lévő nyilak, amelyek eredetileg egy kört alkottak, most mind a síkidom határára merőlegesek és a síkidom belseje felé mutatnak, tehát nem alkothatnak egy kört (ez alól kivételek az $n = 1$-nél tárgyalt $\uparrow \rightleftarrows \downarrow$ típusú körök, de itt szemmel látható, hogy az átlós nyilak ellentétes irányúak).

Azonban most, az elforgatott nyilak szerint haladva is eljutunk egy körhöz, s mivel semelyik ilyen kör sem eshet egybe a határral, a kör kevesebb mint $n+1$ egységnégyzetet tartalmaz. Az indukciós feltevésünk szerint létezik a kör által körülfogott síkidomban két olyan szomszédos nyíl, amelyek ellentétes irányúak. Most forgassuk vissza eredeti helyzetükbe a nyilakat. Könnyen ellenőrizhető, hogy azok a nyilak, amelyek az elforgatás előtt szomszédosak és ellentétes irányúak voltak, az elforgatás után is ilyen tulajdonságúak maradnak, tehát eredetileg is létezett két szomszédos, ellentétes irányba mutató nyíl.

Kondacs Attila

A csapatverseny feladatai:

1. Legyen α pozitív racionális szám. Bizonyítsuk be, hogy van olyan, az α-t tartalmazó nyílt I intervallum, hogy minden olyan β racionális számra, melyre $\beta \in I$ és $\beta \neq \alpha$, a β nevezője nagyobb, mint az α nevezője. (A törteket egyszerűsített alakban tekintsük.)

2. Adott racionális α-hoz jelölje I_α a maximális fenti tulajdonságú intervallumot. Határozzuk meg I_α-t, ha $\alpha = \dfrac{19}{90}$.

3. Legyenek a és b olyan valós számok, melyekre

$$0 < a < b < 1 + a.$$

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan racionális α, melyre $a < \alpha < b$ és $(a;b) \subset I_\alpha$, azaz minden olyan racionális β-ra, melyre $a < \beta < b$ és $\beta \neq \alpha$, a β nevezője nagyobb, mint az α nevezője.

4. Adott pozitív valós $(a;b)$ párra jelölje a fenti α-t $\alpha(a;b)$. Határozzuk meg az

$$i)\ \alpha\left(\frac{70}{177}, \frac{27}{68}\right)$$

$$ii)\ \alpha\left(\sqrt{1990}, \sqrt{1991}\right)$$

értékeket.

Tervezzünk minél gyorsabb algoritmust $\alpha(a;b)$ kiszámítására.

A verseny egyéni részét az izraeli *Erez Lapid* nyerte 22 ponttal, második helyen *Balogh József* végzett 21 ponttal. Az első nap feladataiból álló csapatverseny magyar győzelmet hozott; a magyar csapat összpontszáma 60, az izraelié pedig 50 pont volt. A zsüri a második nap feladataira beadott megoldások közül szintén a magyar csapat dolgozatait tartotta jobbnak, úgyhogy a verseny szép magyar sikert hozott.

Vendéglátóink gazdag programot biztosítottak számunkra. Az intézet maga is nagy élmény volt, jártunk Tel Avivban, Jeruzsálemben, kétnapos buszkirándulást tettünk Izrael bibliai tájain, egy éjszakát egy kibucban töltöttünk a libanoni határ mentén, ahol az alapítók mesélték el nekünk a kibuc történetét és mai életét.

Jövőre Magyarország a meghívó fél, nálunk lesz a verseny, és remélhetőleg a jövőben évről-évre egyszer Izraelben, egyszer pedig Magyarországon sor kerül a két ország diákjainak találkozójára.