

1. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x+1}{x-2}.$$

(10 pont)

2. Egy számtani sorozat harmadik eleme az első elem négyzete; az első három elem összege 30. Írja fel a sorozat első három elemét!

(10 pont)

3. Az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $BC$  alapja 40 egység, az alaphoz tartozó magasság 15 egység. Az alap  $F$  felezőpontjából a szárakra állított merőlegesek talppontjai  $P$  és  $Q$ . Mekkora az  $APFQ$  négyszög kerülete és területe?

(12 pont)

4. Egy rombusz egyik csúcsa az  $A(5; 8)$  pont, a  $BD$  átló egyenesének egyenlete  $x - 2y + 6 = 0$ . A rombusz oldala 5 egység. Határozza meg a többi csúcspont koordinátáit és a rombusz területét!

(13 pont)

5. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}; \quad \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1.$$

(13 pont)

6. Egy szabályos négyoldalú gúla minden éle egyenlő. A gúlába írt kocka alaplapja a gúla alaplapján van, fedőlapjának csúcsai pedig a gúla oldalélein. Hányszorosa a gúla térfogata a kocka térfogatának?

(13 pont)

7. Igazolja, hogy a  $p$  valós paraméter tetszőleges értékénél pontosan egy valós gyöke van az alábbi egyenletnek:

$$x|x+2p| = p.$$

(14 pont)

8. Jelölje  $a$ ,  $b$  és  $c$  egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}.$$

(15 pont)