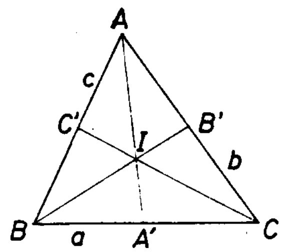
A feladatok alábbi megoldásait az olimpián részt vett versenyzők készítették.

1. *Jelöljük az ABC háromszög beírt körének középpontját I-vel, a $CBA\sphericalangle$, $ABC\sphericalangle$, $BCA\sphericalangle$ szögek szögfelezőinek metszéspontját a szemközti oldalakkal pedig rendre A', B', C'-vel. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

(USA)

Megoldás. Legyenek az ABC háromszög oldalai a szokásos jelöléssel a, b, és c.



Segédtétel: Ismert, hogy

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c},$$
$$\frac{BI}{BB'} = \frac{a+c}{a+b+c} \quad \text{és}$$
$$\frac{CI}{CC'} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

(Ennek bizonyítása két szögfelező tétel segítségével: $BA' = \dfrac{ac}{b+c}$, így

$$\frac{AI}{IA'} = \frac{AB}{BA'} = \frac{c}{\dfrac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a},$$

ahonnan valóban

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{b+c}{a+b+c}).$$

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget használva, és az $\dfrac{AI}{AA'} + \dfrac{BI}{BB'} + \dfrac{CI}{CC'} = 2$ összefüggést felismerve kapjuk, hogy

$$\frac{AI}{AA'} \cdot \frac{BI}{BB'} \cdot \frac{CI}{CC'} \leq \left(\frac{\dfrac{AI}{AA'} + \dfrac{BI}{BB'} + \dfrac{CI}{CC'}}{3} \right)^3 = \frac{8}{27},$$

és egyenlőség csak szabályos háromszögnél áll fenn. Másfelől az a, b és c számokra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, így $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) + 4abc > 0$. Ezt beszorozva és rendezve:

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$-t, majd szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$4(a+b)(b+c)(a+c) > (a+b+c)^3,$$

azaz

$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} = \frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{(a+b+c)^3} > \frac{1}{4}.$$

Ezzel a bizonyítandó két egyenlőtlenséget beláttuk.

Matolcsi Máté

2. *Legyen $n > 6$ egész szám és $a_1, a_2, \ldots, a_k$ az összes olyan természetes szám, amely kisebb n-nél és relatív prím n-hez. Tegyük fel, hogy*

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1} > 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor n prímszám, vagy 2-nek egész kitevős hatványa.

(Románia)

Megoldás. Legyen $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} = d$. Mivel $d > 0$, ezért $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Mivel minden pozitív egész n-re $(n-1, n) = 1$, ezért $a_k = n - 1$, továbbá nyilván $a_1 = 1$.

I. Legyen először n páratlan. Ekkor $(n-2, n) = 1$. (Ugyanis $x|n$ és $x|n-2$ esetén $x|2$, de n páratlan, így $x = 1$, ezért $a_{k-1} = n - 2$. Így viszont $d = 1$ és ekkor minden n-nél kisebb pozitív egész relatív prím n-hez, azaz n-nek nincs nála kisebb valódi osztója; így n prím, ahogy a feladat állítja.

II. Legyen most n páros, és írjuk fel $n = 2^{\alpha} \cdot n_1$ alakban, ahol $\alpha \geq 1$ és n_1 páratlan.

a) Ha $n_1 = 1$, akkor n 2-hatvány, ahogy állítottuk; ekkor a feltétel nyilván teljesül, hiszen az a_i-k éppen az n-nél kisebb páratlan számok és $d = 2$.

b) Ha $n_1 = 3$ volna, akkor $n > 6$ miatt $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 7$ és $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, ez pedig lehetetlen.

c) Legyen végül $n_1 \geq 5$. Megmutatjuk, hogy ekkor $n_1 - 2$ és $n_1 - 4$ szerepel az a_i-k között. Tegyük fel ugyanis, hogy $x|2^{\alpha}n_1$ és $x|n_1 - 2$. Ekkor $x|2^{\alpha}n_1 = 2^{\alpha}(n_1 - 2) + 2^{\alpha+1}$ miatt $x|2^{\alpha+1}$. De x páratlan, így $x = 1$, azaz $(n_1 - 2,\ 2^{\alpha}n_1) = 1$. Hasonlóan $(n_1 - 4,\ 2^{\alpha}n_1) = 1$. Nyilván $n_1 - 3$ nem szerepel az a_i-k között, hiszen páros; így $d = 2$. De ekkor n_1 is szerepel az a_i-k között (az a_i-k rendre $1, 3, 5, \ \dots, n_1 - 2, n_1, \ \dots$). Ez viszont ellentmondás, mert $(n_1, n) = n_1 > 1$.

Beláttuk tehát, hogy n prím vagy 2-hatvány, a bizonyítást befejeztük.

Szendrői Balázs

3. *Legyen $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Határozzuk meg azt a legkisebb n egész számot, amelyre igaz az, hogy S minden n elemű részhalmaza tartalmaz 5 olyan számot, amelyek páronként relatív prímek.*

(Kína)

Megoldás. Válasszuk ki az S halmazból a 2, a 3, az 5 és a 7 többszöröseit. Ezek közül akárhogyan választunk ki 5 számot, lesz kettő, amelyek ugyanannak a prímnek a többszörösei, tehát nem relatív prímek. Az S-ből kiválasztott elemek száma a szita-formula segítségével kiszámolva 216. Ezért a keresett n egész legalább 217.

Bebizonyítjuk, hogy $n = 217$ esetén már teljesül a feltétel. Ehhez vizsgáljuk meg, hogy legfeljebb hány elem lehet S-nek egy olyan részhalmazában, amelyben nincs 5 olyan szám, amelyek páronként relatív prímek. A fent megadott 216 elemű halmaz kiválasztásakor elhagytuk a prímek és az 1 közül négy kivételével az összeset, a prímnégyzetek közül is négy kivételével az összeset, és ezeken kívül még hat darab két prím szorzataként felírható számot:

$$11 \cdot 13 \quad 11 \cdot 23 \quad 11 \cdot 17 \quad 13 \cdot 17 \quad 11 \cdot 19 \quad 13 \cdot 19$$

Az eredeti feltételnek nem megfelelő bármely halmazban is a prímek és az 1 közül legfeljebb 4 lehet, különben lenne 5 szám, amelyek páronként relatív prímek, így ezek közül legalább annyit el kell hagyni, mint az előző példában. Ugyanez igaz a prímnégyzetekre is. Már csak az kell, hogy ezeken kívül még legalább 6 elemet el kell hagyni. Alább megadok 6 db 5 elemű diszjunkt halmazt, amelyek S részhalmazai, prímet és prímnégyzetet nem tartalmaznak, és mindegyikben páronként relatív prímek vannak, tehát mindegyik halmaznak legalább egy elemét el kell hagyni az S-ből ahhoz, hogy a feltétel ne teljesüljön.

A halmazok:

$$\{2^3; 3^3; 5 \cdot 23; 7 \cdot 19; 11 \cdot 13\} \qquad \{2^6; 3 \cdot 17; 5^3; 7 \cdot 13; 11 \cdot 23\}$$
$$\{2^4; 3^4; 5 \cdot 19; 7 \cdot 23; 11 \cdot 17\} \qquad \{2^7; 3 \cdot 23; 5 \cdot 29; 7 \cdot 11; 13 \cdot 19\}$$
$$\{2^5; 3^5; 5 \cdot 13; 7 \cdot 17; 11 \cdot 19\} \qquad \{2^8; 3 \cdot 19; 5 \cdot 11; 7 \cdot 29; 13 \cdot 17\}$$

Tehát, ha kiválasztunk S-ből egy 217 elemű halmazt, akkor az vagy tartalmaz egyet az előbbi 6 halmazból, vagy tartalmaz 5 prímet, vagy található benne 5 prímnégyzet. Ekkor van benne 5 szám, amelyek páronként relatív prímek. Tehát a keresett n szám a 217.

Ujváry-Menyhárt Zoltán

4. *Legyen a G összefüggő gráf éleinek száma k. Bizonyítsuk be, hogy meg lehet az éleket számozni az $1, 2, 3, \dots, k$ számokkal úgy, hogy minden olyan csúcs esetén, amelyből legalább két él indul ki, az illető csúcsból kiinduló összes élhez rendelt számok legnagyobb közös osztója* 1.

[Gráfnak nevezzük csúcsnak nevezett pontok egy halmazát, ahol a két különböző csúcsból álló párok némelyikét élek kötik össze. Bármely két különböző u, v csúcs között legfeljebb egy él halad. A G gráfot összefüggőnek nevezzük, ha bármely két különböző x, y csúcshoz található csúcsoknak egy olyan $x = v_0, v_1, \dots, v_m = y$ sorozata, hogy minden $u_i, v_{i+1} \quad (0 \leq i < m)$ csúcspárt él köt össze.]

(USA)

Megoldás. Úgy fogjuk megszámozni az éleket, hogy már két olyan él is tartozzék minden legalább másodfokú csúcshoz, amelyekre egymáshoz relatív prím számokat írtunk; ez nyilván elegendő a feladatbeli állítás bizonyítására.

Legyenek a gráf legalább másodfokú csúcsai $A_1, A_2, \dots, A_n$ (ha ilyen csúcs nincsen, akkor triviális az állítás). Mivel a gráf összefüggő, ezért bármely csúcsból bármely csúcsba vezet út a gráfban. Menjünk el A_1-ből A_2-be, A_2-ből A_3-ba, $\dots, A_{n-1}$-ből A_n-be, végül A_n-ből A_1-be a gráf egy-egy tetszőleges élsorozatán keresztül! Így egy olyan utazást teszünk a gráfban, amelynek során minden A_i-t ($i = 1, 2, \ldots, n$) érintünk és *elhagyunk* legalább egyszer. Tegyük fel, hogy utazásunk alatt sorra számozzuk az érintett éleket az $1, 2, \ldots, l$ számokkal ($1 \le l \le k$) – azzal a kikötéssel, hogy ha egy élre

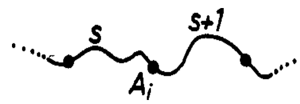
a) már írtunk számot, akkor arra új számot már nem írunk.

b) még nem írtunk számot (tehát az utazás során először érintjük), akkor 1-gyel nagyobb számot írunk rá, mint amilyet utoljára használtunk.

Ezek szerint mindig csak az „új” – addig még nem érintett – élekre kell számot írnunk, és összesen l db élt számoztunk meg a k db él közül.

Az utazásnál még egy dologra kell ügyelnünk:

Ha valamelyik A_i csúcsot ($i = 2, 3, \ldots, n$) *először* érintjük utazásunk során (ez biztosan bekövetkezik minden i-re valamikor), akkor A_i-t *másik élén keresztül* hagyjuk el, mint amilyenen keresztül megközelítettük; ez megtehető, mert A_i legalább másodfokú. Mivel az A_i-ből kiinduló élek egyikét sem érintettük azelőtt, ezért a számozási algoritmus szerint ebben a lépésben A_i-nek 2 élére 2 *szomszédos* számot kell írnunk.



Ha utazásunkat és a számozást az előírt módon végezzük, akkor teljesül, hogy

– az A_1-ből kiinduló egyik élre (utazásunk első élére) az 1-et írjuk,

– A_i-ből ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) kiindul 2 olyan él, amelyre szomszédos számokat írunk.

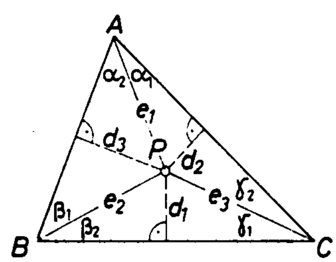
Mivel x és y pozitív egészek relatív prímek egymáshoz, ha $x = 1$ vagy $y - x = 1$, ezért a megoldás elején megfogalmazott követelményünk teljesül, vagyis – a fennmaradó $k - l$ db élt tetszőlegesen megszámozva az $l + 1, l + 2, \ldots, k$ számokkal – a feladat állítását beláttuk.

Harcos Gergely

5. *Legyen P az ABC háromszög belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy a $PAB\sphericalangle$, $PBC\sphericalangle$, $PCA\sphericalangle$ szögek közül legalább egy kisebb, vagy egyenlő, mint* $30°$.

(Franciaország)

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit.



Vegyük észre, hogy

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} = \frac{\dfrac{d_2}{e_1}\cdot\dfrac{d_3}{e_2}\cdot\dfrac{d_1}{e_3}}{\dfrac{d_3}{e_1}\cdot\dfrac{d_1}{e_2}\cdot\dfrac{d_2}{e_3}} = 1.$$

Tegyük fel, hogy a feladat állítása nem igaz, tehát α_1, β_1, és γ_1 is nagyobb, mint $30°$. Ha például $\alpha \ge 150°, \beta$ és γ is kisebb, mint $30°$, így máris ellentmondásra jutottunk. Ha pedig α, β és γ mindegyike kisebb $150°$-nál, akkor $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma > \dfrac{1}{8}$. Ugyanakkor a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint

$$\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2 \le \left(\frac{\sin\alpha_2 + \sin\beta_2 + \sin\gamma_2}{3}\right)^3.$$

A Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva (hisz a sin függvény a $[0, \pi]$ intervallumon konkáv)

$$\sin\alpha_2 + \sin\beta_2 + \sin\gamma_2 \le 3\sin\frac{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3}.$$

De mivel $0° < \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 < 90°$, $\quad 3\sin\dfrac{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3} < \dfrac{3}{2}$, így

$$\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2 < \left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

vagyis

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2} > 1.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát bizonyítottuk a feladat állítását.

Kőszegi Botond

6. *Valós számok egy $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots$ sorozatát korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan C konstans, hogy $|x_i| \le C$ minden $i \ge 0$-ra.*

Minden rögzített $a > 1$ valós számhoz konstruáljunk olyan korlátos, végtelen $x_0, x_1, x_2, \dots$ sorozatot, amelyre

$$|x_i - x_j||i-j|^a \ge 1$$

teljesül bármely két különböző, nemnegatív i, j egészre.

(Hollandia)

I. megoldás. Tetszőleges $k \in \mathbf{N}$ esetén, ha k diadikus alakja

$$k = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{②} = \sum_{s=0}^{n} a_s \cdot 2^s \qquad (a_i = 0 \text{ vagy } 1;\ i = 0,\ \dots, n),$$

akkor legyen

$$y_k = \sum_{s=0}^{n} a_s \cdot 2^{-as},$$

ahol $a > 1$ a feladatban rögzített valós szám. Legyen most $i, j \in \mathbf{N}, i \ne j$, továbbá i és j kettes számrendszerbeli alakja

$$i = \overline{b_n b_{n-1} \dots b_0}_{②} \quad \text{és} \quad j = \overline{c_m c_{m-1} \dots c_0}_{②}$$

Feltehető, hogy $i > j$, és ekkor $n \ge m$. Tegyük fel továbbá, hogy r az a természetes szám, amelyre i és j diadikus alakja az utolsó r db jegyben megegyezik, de $(r+1)$-edik jegyében – hátulról olvasva – már különbözik:

$$r = \min\{s|\ b_s \ne c_s, \qquad 1 \le s \le n\},$$

($m < s \le n$ esetén legyen $c_s = 0$). Ekkor

$$|i-j| = i - j \ge 2^r, \tag{1}$$

és $a > 1$ miatt

$$\begin{aligned}|y_i - y_j| &= \left|\sum_{s=0}^{n} b_s \cdot 2^{-as} - \sum_{s=0}^{m} c_s \cdot 2^{-as}\right| = \left|\sum_{s=r}^{n} b_s \cdot 2^{-as} - \sum_{s=r}^{n} c_s \cdot 2^{-as}\right| \ge \\ &\ge 2^{-ar} - 2^{-a(r+1)} - 2^{-a(r+2)} - \dots - 2^{-an} > 2^{-ar}\left(1 - \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-as}\right) = \\ &= 2^{-ar}\left(1 - 2^{-a}\frac{1}{1-2^{-a}}\right) = 2^{-ar}\left(1 - \frac{1}{2^a - 1}\right) = 2^{-ar} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1}.\end{aligned}$$

Ezt (1)-gyel egybevetve:

$$|y_i - y_j| \cdot |i-j|^a > 2^{-ar} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1} \cdot (2^r)^a = \frac{2^a - 2}{2^a - 1},$$

ami azt jelenti, hogy az

$$x_k = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} y_k \quad (k = 0, 1,\ \dots)$$

sorozat $i, j \in \mathbf{N}$; $\quad i \ne j$ esetén

$$|x_i - x_j| \cdot |i-j|^a > 1,$$

továbbá (y_k) korlátos volta miatt (x_k) is korlátos:

$$0 \le x_k = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} y_k < \frac{2^a - 1}{2^a - 2} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-as} = \frac{2^a}{2^a - 2}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

II. megoldás. Konstrukciót adunk az $a = 1$ esetre – ez nyilván megfelelő $a > 1$ esetére is.

Alapötletünk a következő: Tegyük fel, hogy γ olyan (irracionális) szám, amelynek minden $\frac{p}{q}$ $(p,q \in \mathbf{Z}; \quad q > 0)$ közelítő törtjére az eltérés

$$|\gamma - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{\alpha q^2}, \tag{2}$$

ahol $\alpha > 0$ valamilyen rögzített konstans. Ekkor tekintjük az

$$x_k = \alpha \cdot \{\gamma k\} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

sorozatot, ahol $\{t\} = t - [t]$ a t szám törtrészét jelöli. Világos, hogy (x_k) korlátos:

$$0 < x_k < \alpha,$$

továbbá $i,j \in \mathbf{N}; \quad i \neq j$ esetén ($i > j$ feltehető)

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j| = \alpha \cdot |\{\gamma i\} - \{\gamma j\}| \cdot |i - j| =$$
$$= \alpha \cdot |(\gamma i - \gamma j) - ([\gamma i] - [\gamma j])| \cdot |i - j|,$$

ill. a $q = i - j$ (> 0), $p = [\gamma i] - [\gamma j]$ jelöléssel p és q egészek, tehát (2) szerint

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j| = \alpha \cdot |q\gamma - p| \cdot q = \alpha q^2 \cdot \left|\gamma - \frac{p}{q}\right| \geq 1,$$

vagyis az (x_k) sorozat megfelelő.

Az is látszik, hogy az

$$x'_k = x_k - \frac{\alpha}{2} \quad (k = 0, 1, \ldots) \text{ sorozatra} \quad |x'_k| < \frac{\alpha}{2}, \text{továbbá}$$
$$|x'_i - x'_j| \cdot |i - j| = |x_i - x_j| \cdot |i - j| \geq 1,$$

tehát az x'_k sorozat is megfelelő.

Ezek szerint csak a (2)-t kielégítő γ-t és α-t kell találnunk, sőt minél kisebb az α, annál jobb a sorozatunk korlátja.

(2)-re talán $\gamma = \sqrt{2}$ és $\alpha = 3$ adja a legegyszerűbb példát:

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{3q^2} \tag{3}$$

mindig fennáll. Ha ugyanis lenne olyan $\frac{p}{q}$ közelítő tört, amelyre

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{3q^2}, \tag{4}$$

akkor

$$\sqrt{2}q - \frac{1}{3q} \leq p \leq \sqrt{2}q + \frac{1}{3q},$$

azaz négyzetre emelés és rendezés után

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2 \leq p^2 - 2q^2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2$$

lenne, amiből

$$|p^2 - 2q^2| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2$$

következnék. (4) nyilván nem állhat fenn $q = 1$ esetén, ezért $q \geq 2$, tehát

$$|p^2 - 2q^2| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3 \cdot 2}\right)^2 = \frac{2\sqrt{2} + \frac{1}{12}}{3} < 1.$$

vagyis

$$p^2 - 2q^2 = 0,$$

hiszen $|p^2 - 2q^2|$ nemnegatív egész.

Mivel $\sqrt{2}$ irracionális, ezért $p^2 - 2q^2 = 0$ ellentmondást jelent, ami (3)-at igazolja.

Ezzel sikerült megadnunk olyan (x_k) sorozatot, amelyre

$$|x_k| < \frac{3}{2}, \quad \text{és} \quad |x_i - x_j| \cdot |i - j| \geq 1$$

teljesül, ha $i, j \in \mathbf{N}; \quad i \neq j$.

Harcos Gergely