1. Az ABC derékszögű háromszög befogói: $AB = 3$; $BC = 3\sqrt{3}$; ezért az átfogó $AC = 6$, a háromszög köré írt kör sugara 3 egység. Ezekből következik, hogy az AOB háromszög (amelynek O csúcsa a kör középpontja) egyenlő oldalú: mindegyik oldalának hossza 3 egység. A körszelet kerülete az AB oldal és az AB ív hosszának összege. Az AB ívhez tartozó középponti szög: $AOB\sphericalangle = 60°$.

$$K_{szelet} = 3 + \frac{2 \cdot 3\pi}{6} = 3 + \pi \ (= 6{,}142) \text{ egység.}$$

A körszelet területét az AOB körcikk és az AOB egyenlő oldalú háromszög területének különbsége adja:

$$T_{szelet} = \frac{9\pi}{6} - \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{4} \ (= 0{,}815) \text{ területegység.}$$

2. Felhasználva a $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ és a kétszeres szögekre vonatkozó trigonometrikus azonosságokat, az egyenlet

(1) $$\frac{\cos x}{\sin x} - 2\sin x \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}(\cos^2 x - \sin^2 x),$$

ha $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ alakra hozható.

Rendezés után az

(2) $$(1 - \sin^2 x - \cos^2 x)\cos x = 0$$

egyenletet kapjuk.

Mivel $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, ezért a szorzat első tényezője nullával egyenlő. Így a (2) egyenlet minden valós számra igaz. Mivel a megadott feltétel mellett egyenértékű átalakításokat végeztünk, az eredeti egyenletnek az $x = k\pi$-től $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ különböző valós számok a megoldásai.

3. A testvérek mostani életkora is egy számtani sorozat négy egymás utáni eleme. Jelölje e sorozat elemeit a_1; $a_1 + d$; $a_1 + 2d$; $a_1 + 3d$, ahol a_1 a legidősebb testvér mostani életkora.

A feltételek szerint

$$(a_1 + 2d - 15)^2 = (a_1 - 15)(a_1 + 3d - 15),$$
$$a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 3d = \frac{11}{4}(a_1 + d).$$

Rendezés után a

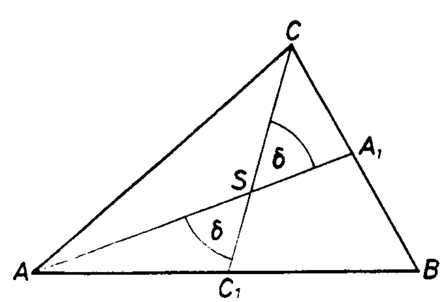
$$d(4d - 15 + a_1) = 0,$$
$$a_1 + 9d = 0$$

egyenletrendszert kapjuk.

Ha $d = 0$, akkor $a_1 = 0$, ez azonban nem megoldása a feladatnak. Ha $4d - 15 + a_1 = 0$, akkor $d = -3$ és $a_1 = 27$.

Így a testvérek mostani életkora: 27; 24; 21; 18 év.

4. Az *ábra* jelölései szerint $AB = 10$, a súlyvonalak $CC_1 = 6$ és $AA_1 = 9$, továbbá S az ABC háromszög súlypontja. Alkalmazzuk a koszinusztételt az ASC_1 háromszögre. Mivel $AC_1 = 5$, $AS = 6$ és $SC_1 = 2$, ezért $25 = 36 + 4 - 24\cos\delta$, és ebből $\cos\delta = \dfrac{5}{8}$.



Az A_1SC háromszög CA_1 oldalát is a koszinusztétellel számíthatjuk ki: mivel $CS = 4$ és $SA_1 = 3$, ezért $CA_1^2 = 16 + 9 - 24 \cdot \dfrac{5}{8}$, azaz $CA_1 = \sqrt{10}$. Mivel $2 \cdot CA_1 = CB$, ezért $CB = 2\sqrt{10}\,(= 6{,}325)$. Az ASC háromszögből szintén koszinusztétellel kapjuk meg az AC oldal hosszát:

$$AC^2 = 36 + 16 + 48 \cdot \frac{5}{8} = 82.$$

Ebből $AC = \sqrt{82}\,(= 9{,}055)$.

5. Legyen $C(x;y)$ az adott kör olyan pontja, amelyre fennáll, hogy

$$\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}. \tag{1}$$

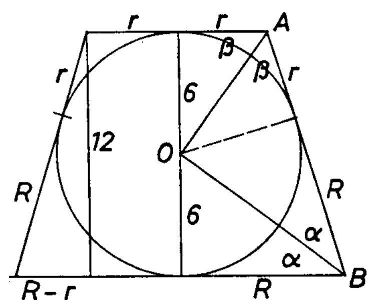
(1)-ből a következő egyenletet kapjuk:

$$4\big[(x+4)^2 + (y+1)^2\big] = 9\big[(x-6)^2 + (y-1)^2\big]. \tag{2}$$

Mivel $C(x;y)$ a kör pontja, ezért (2)-ből és a kör egyenletéből egy egyenletrendszerhez jutunk, amelyből $y = 15-5x$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve a $13x^2 - 76x + 100 = 0$ egyenletet kapjuk. Az egyenlet megoldásai $x_1 = 2$ és $x_2 = \dfrac{50}{13}$.

A kör keresett pontjai: $C_1(2;5)$ és $C_2(\frac{50}{13}; -\frac{55}{13})$.

6. A csonka kúp tengelymetszetének ábrájáról leolvasható, hogy a csonka kúp alkotója $R+r$, magassága pedig 12 egység.



A csonkakúp felszíne:

$$A = \pi(R^2 + r^2) + \pi(R+r)(R+r) = 2\pi(R^2 + Rr + r^2),$$

térfogata:

$$V = 4\pi(R^2 + Rr + r^2).$$

A két mérőszám hányadosa: $\dfrac{V}{A} = 2$.

A magasság által levágott derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$12^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2, \quad \text{ebből: } Rr = 36.$$

7. Az egyenlet értelmezése miatt $x \neq \pm p$. Az adott egyenlet ekvivalens átalakításokkal $x(4-p) = 8p^2$ alakra hozható. Ha $p = 4$, akkor nincs megoldása az egyenletnek. Ha $p \neq 4$, akkor $x = \dfrac{8p^2}{4-p}$. Mivel azonban $x \neq \pm p$, ezért $x = \dfrac{8p^2}{4-p} \neq \pm p$.

Az eredeti egyenletnek tehát akkor sincs megoldása,

$$\text{ha } \frac{8p^2}{4-p} = p, \quad \text{azaz } p = 0 \quad \text{vagy } p = \frac{4}{9},$$

$$\text{ha } \frac{8p^2}{4-p} = -p, \quad \text{azaz } p = 0 \quad \text{vagy } p = -\frac{4}{7}.$$

Összefoglalva: Akkor van megoldása az adott egyenletnek, ha $p \neq -\frac{4}{7}; 0; \frac{4}{9}; 4$.

Ahhoz, hogy az egyenlet gyökére teljesüljön a második kérdés feltétele, a

$$\frac{8p^2}{4-p} < p \tag{*}$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

Ha $p < 4$, akkor $(*)$ ekvivalens azzal, hogy $9p^2 - 4p < 0$, ami akkor teljesül, ha $0 < p < \dfrac{4}{9}$.

Ha $p>4$, akkor $(*)$ ekvivalens azzal, hogy $9p^2-4>0$, ez pedig akkor áll fenn, ha $p<0$ vagy $p>\frac{4}{9}$, de a kezdeti feltétel miatt $p>4$.

Összefoglalva: az egyenlet gyöke akkor lesz kisebb p-nél, ha $0<p<\frac{4}{9}$ vagy $p>4$.

8. a) Alakítsuk át az adott kifejezést a következő módon:

$$\begin{aligned}10^n(9n-1)+1&=9n\cdot 10^n-(10^n-1)=\\=9(\underbrace{10^n+10^n+\ldots+10^n}_{n\,\mathrm{tag}})&-9(\underbrace{10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+1}_{n\,\mathrm{tag}})=\\&=9[10^{n-1}(10-1)+10^{n-2}(100-1)+\ldots+(10^n-1)].\end{aligned}$$

Mivel a szögletes zárójelen belül a kerek zárójeles különbségek mind oszthatók 9-cel, ezért az egész kifejezés osztható $9\cdot 9=81$-gyel.

b) Mivel $1990=10\cdot 199$, továbbá hogy 10 és 199 relatív prímek, elég bizonyítani, hogy az adott szorzat osztható 199-cel és 10-zel. 600^n-3^n osztható $600-3=597=3\cdot 199$-cel, tehát 199-cel is.

Azt kell még bizonyítanunk, hogy n^5-n osztható 10-zel; ehhez elég megmutatnunk, hogy utolsó jegye 0. Nézzük végig n lehetséges utolsó jegyeit. Ha n végződése 0; 1; 2; …; 9, akkor n^5 végződése is rendre 0; 1; 2; …; 9 (pl. azért, mert n^5 utolsó jegye rendre megegyezik a $0^5=0$, $1^5=1$, $2^5=32$, …, $9^5=59049$ utolsó jegyével), különbségük utolsó jegye tehát valóban 0.