1. Két esetet különböztetünk meg:

$$a)\ x+3 \geqq 0; \quad b)\ x+3<0.$$

Az a) esetben egyenletünk így alakul:

$$(x+3)\cdot(x+1)=0.$$

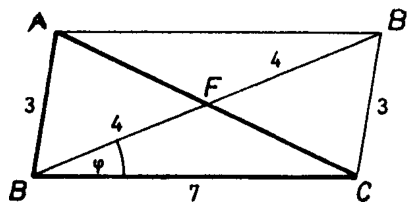
Ennek mindkét megoldása megfelelő: $x_1=-3; \quad x_2=-1$.
A b) esetben egyenletünk így alakul:

$$x^2+2x-3=0.$$

A gyökök: $x_3=-3$ és $x_4=1$ nem elégítik ki az $x<-3$ feltételt.

2. A termék eredeti ára legyen x. Ha ezt 10 %-kal felemelik, akkor az új ár $1{,}1\cdot x$. Másodszorra 10 %-kal csökkentik az árat, ezért $1{,}1\cdot x\cdot 0{,}9$ lesz a következő ár. Végül ismét 10 %-os áremelés következik. Utána a termék ára: $x\cdot 1{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1{,}1 = x\cdot 1{,}089$. A szóban forgó termék végső ára tehát az eredeti árnak 108,9 százaléka lesz.

3. Tükrözzük a B csúcsot az AC oldal F felezőpontjára, a tükörkép legyen B'. Mivel a BFA háromszög egybevágó a $B'FC$ háromszöggel, az ABC háromszög területe egyenlő a BCB' háromszög területével, amelynek oldalai ismertek: $BC=7, \quad CB'=3, \quad BB'=8$.



A koszinusztételt a $B'BC$ háromszögre alkalmazva:

$$\cos\varphi = \frac{7^2+8^2-3^2}{2\cdot 8\cdot 7} = \frac{13}{14},$$

innen

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

A BCB' háromszög területe:

$$t = \frac{8\cdot 7\cdot \sin\varphi}{2} = 6\sqrt{3} = 10,39.$$

4. A második egyenletből következik, hogy $x>0, \quad y>0$. Az első egyenletben közös nevezőre hozva:

$$\frac{x+y}{xy} = x+y.$$

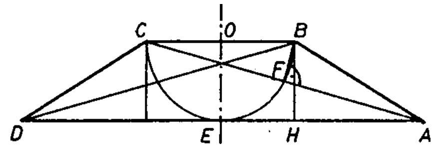
Mivel $x+y>0, \quad xy=1$ adódik. Innen $y=\frac{1}{x}$.
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $\lg x$-re másodfokú egyenletet kapunk:

$$\lg^2 x - 2\lg x + 1 = 0.$$

Ebből $\lg x = 1, \quad x=10$, így $y=\frac{1}{10}$.

A keresett valós számpár tehát $x=10, \quad y=\frac{1}{10}$, amely kielégíti az eredeti egyenletrendszert.

5. A feltevés szerint a trapéz szimmetrikus az OE egyenesre, így a trapéz egyenlő szárú.



Thalesz tétele miatt a $BFC\sphericalangle = 90^\circ$, tehát BF az ABC háromszög magassága, ugyanakkor $AF = CF$ miatt BF súlyvonal is, tehát az ABC háromszög egyenlő szárú: $BA = BC$. Mivel $BC = 2BO$ és $BO = BH$ a kör sugara, ezért az ABH derékszögű háromszögben az AB átfogó kétszerese a BH befogónak, így $BAH\sphericalangle = 30^\circ$. A trapéz szögei tehát 30° és 150°.

6. A $(6;4)$ ponton átmenő egyenesek közül az $x = 6$ egyenes nem felel meg a feltételeknek. Az adott ponton áthaladó többi egyenes iránytangensét jelöljük m-mel. Az egyenletek:

$$y = m(x-6) + 4. \tag{1}$$

Ezek az $x + y = 4$ egyenletű egyenest az

$$x_1 = \frac{6m}{m+1},$$

az $x + y = 5$ egyenest pedig az

$$x_2 = \frac{6m+1}{m+1}$$

abszcisszájú pontban metszik. A feltétel szerint $|x_1 - x_2| = 2$, azaz $x_1 - x_2 = 2$, vagy $x_2 - x_1 = 2$.

Az első esetben $m = -\frac{3}{2}$, a másodikban $m = -\frac{1}{2}$ adódik. A keresett egyenesek egyenlete tehát (1)-ből

$$3x + 2y = 26,$$

illetve

$$x + 2y = 14.$$

7. A logaritmus értelmezése miatt $x > 4$. Mivel $\log_5(x-4) + \log_{\frac{1}{5}}(x-4) = 0$, az egyenlet így alakul:

$$\log_{\sqrt{5}}(x^3 - 2) = 4, \quad \text{innen } x = 3.$$

Az eredeti egyenletnek 3 nem gyöke, így annak nincs gyöke a valós számok körében.

8. $x = 0$-nál is fennáll az egyenlőség, így

$$\cos b^2 - b^2 - a = 1 - a,$$

ahonnan

$$\cos b^2 = 1 + b^2,$$

majd

$$b^2 = 0 \quad \text{következik.}$$

$b = 0$ helyettesítéssel az egyenlet így alakul:

$$\cos ax - a\cos x = 1 - a.$$

Felhasználva az $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ azonosságot,

$$\sin^2 a\frac{x}{2} = a\sin^2\frac{x}{2}$$

adódik. Ebből

$$a = 0 \quad \text{és} \quad a = 1.$$

A keresett számpárok: $(0;0)$ és $(1;0)$.