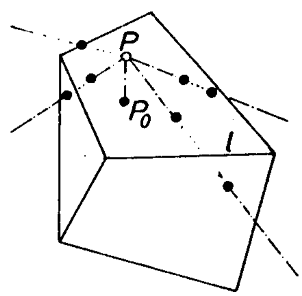
Ebben a részben elsősorban az n-dimenziós konvex poliéderekre vonatkozó Euler-típusú tétel bizonyítása lesz a fő cél. Részben ennek előkészítéseként, részben az eddigiekhez kapcsolódva először modellezzük a 4-, majd később az n-dimenziós konvex poliédereket a 3-, illetve általában az $(n-1)$-dimenziós térben, valamint megvizsgáljuk az n-dimenziós szabályos testeket.

Az előző részben tett erőfeszítéseink ellenére is úgy érzem, csak kissé homályosan tudjuk elképzelni a 4-dimenziós testeket. Természetesen felmerülő kérdés, hogy lehetséges-e valahogy 3 dimenzióban ábrázolni őket. Nos, abban az értelemben, ahogy a 3-dimenziós testeket le tudjuk rajzolni 2 dimenzióban, eggyel magasabb dimenzióban már gondjaink lesznek. Hiszen egy 2-dimenziós rajzot kívülről, a 3-dimenziós térből nézünk, hasonlóan egy 3-dimenziós rajzot a terünkön kívülről kellene nézni.

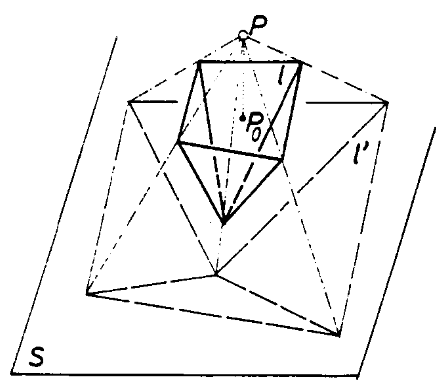
Viszont egy 4-dimenziós konvex testnek olyan 3-dimenziós modelljét már el tudjuk készíteni, amelynek a kombinatorikus szerkezete (csúcsok, élek, lapok, hiperlapok száma és kapcsolódása) megegyezik az eredeti testével. Az egyszerűbb érthetőség kedvéért először a 3-dimenziós konvex testeket modellezem a 2-dimenziós síkon.

Állítsuk a testet úgy, hogy valamelyik (mondjuk l) lapja fölül, vízszintesen legyen. Vegyünk fel egy S vízszintes síkot a test alatt. Legyen P_0 l-nek egy belső pontja. Mivel a test konvex, ezért a P_0-on átmenő, nem vízszintes egyenesek P_0-on kívül pontosan egy pontban metszik a test felszínét, és a felszín minden, nem l-hez tartozó pontjához pontosan egy ilyen egyenes van. Ha P elég kicsivel van P_0 felett, akkor P-re az lesz igaz, hogy minden, l belsején áthaladó, P-ből induló félegyenes még pontosan egy, l-en kívüli pontban metszi a test felszínét, és a felszín minden, l-en kívüli pontjához pontosan egy ilyen félegyenes van. Az l kerületén átmenő, P-ből induló félegyenesek pedig máshol nem metszik a felszínt *(1. ábra)*.



1. ábra

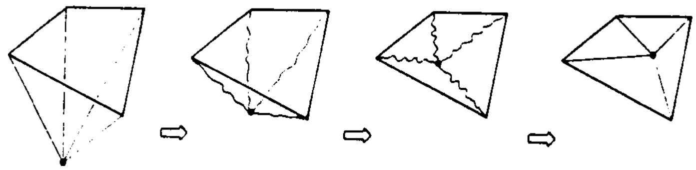
Vetítsük le a test felszínét P-ből a test alatti vízszintes S síkra. (Egy Q felszíni pont vetülete a PQ félegyenes és az S sík metszéspontja. Mivel P a test felett van, S pedig vízszintes, ezért mindig van metszéspont.) Mivel l vízszintes volt, ezért vetülete (l') egy l-hez hasonló, így konvex sokszög lesz. Az előző bekezdés szerint a felszín l-en kívüli részének vetülete egyrétűen lefedi l'-t. Másrészt a konvex lapok vetületei a lappal megegyező oldalszámú konvex sokszögek, tehát a felszín l-en kívüli lapjainak vetületei az l' konvex sokszöget konvex sokszögekre bontják fel, ezek a konvex sokszögek ugyanolyan típusúak, mint a test lapjai, és a szomszédos lapok vetületei szomszédos sokszögek *(2. ábra)*.



2. ábra

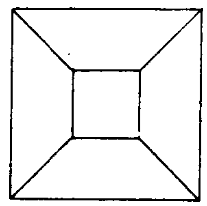
A kapott konvex tartományrendszernek tehát ugyanolyan a kombinatorikus szerkezete, mint az eredeti konvex poliédernek. A k lapú test minden lapjának a vetülete felel meg, így az l lapnak l', a többi $(k-1)$-nek pedig a feldarabolt l' síkidom $(k-1)$ darab konvex sokszögtartománya felel meg.

Az így kapott tartományrendszert a test „kifordításának" fogom hívni. Ezt az elnevezést az motiválja, hogy az előbb kapott tartományrendszert a következőképpen is elő lehet állítani. Képzeljük el, hogy a test felszíne gumihártyából van, az élek gumiszálakból. Tüntessük el az l lap hártyáját. Az így kapott lyukat kezdjük kitágítani, és kezdjük el rajta keresztül a testet kifordítani, de ne fordítsuk ki teljesen, csak a lyuk síkjáig. Így egy ugyanolyan kombinatorikus szerkezetű síkbeli tartományrendszert kapunk, mint az előbb, alkalmas nyújtásokkal és összehúzásokkal megkaphatjuk az előző rendszert *(3. ábra)*.

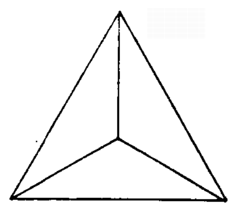


3. ábra

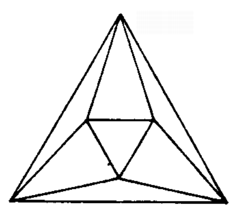
Illusztrációként nézzük meg, hogy mi lesz a 3-dimenziós szabályos testek „kifordítása". (A „kifordítást" mindig az első, a vetítős módszerrel fogjuk elvégezni.) Állítsuk a kockát egy vízszintes S lapra (erre fogunk vetíteni), legyen P a felső lap középpontja fölött kicsivel egy pont. P-ből S-re vetítve a kockát, az alsó lap fixen marad, a felső lap ezzel párhuzamos élű, nagyobb, koncentrikus négyzetbe jut, a négy oldalsó lapból pedig egy-egy egyenlő szárú trapéz lesz *(4.a ábra)*. A többi szabályos test esetén is úgy érdemes végezni a „kifordítást", hogy P-t a felső l lap középpontja felett vesszük, így a 4.*b, c, d, e ábrán* látható szép szabályos tartományrendszereket kapjuk „kifordításként".



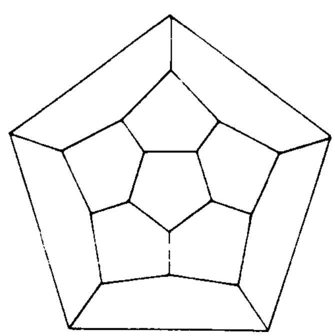
4. a ábra



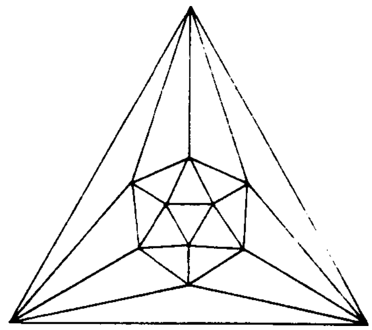
4. b ábra



4. c ábra



4. d ábra

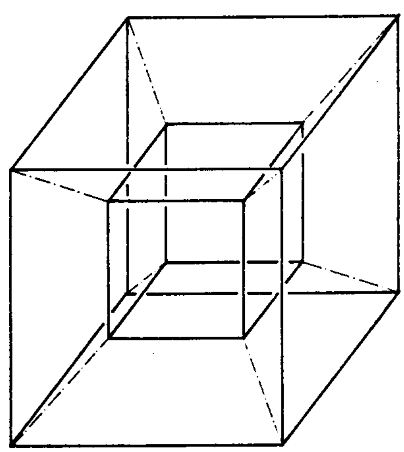


4. e ábra

Ez a „kifordítás” már 3 dimenzióban is néha igen hasznos, például sok (főként kombinatorikus) tulajdonság sokkal könnyebben vizsgálható a síkbeli modellen. Megfordítva, a *4. ábra* rajzait felfoghatjuk gráfoknak is. Így nevezetes síkba rajzolható gráfokat kapunk, amelyeknek néhány tulajdonsága éppen az eredeti test tulajdonságaiból következik.

Minket persze elsősorban a „kifordítás” többdimenziós általánosítása érdekel. Nézzük először 4 dimenzióban! Legyen A egy (k hiperlapú) 4-dimenziós konvex poliéder. Ahogy az egyenes két félsíkra osztja a síkot, a sík két féltérre osztja a teret, a mi (T) 3-dimenziós terünk két 4-dimenziós féltérre osztja a 4-dimenziós teret. Helyezzük el A-t az egyik (mondjuk „felső”) féltérben úgy, hogy az egyik (mondjuk h) hiperlapja párhuzamos legyen a T terünkkel, A pedig h és T között legyen. (Azaz h a „felső” hiperlapja.) Legyen P nagyon kicsivel h egy belső pontja „fölött”. (A „fölött” precízen azt jelenti, hogy a h által meghatározott, A-t nem tartalmazó 4-dimenziós féltérben.) P-ből vetítsük az A testet a T terünkre. Ha P elég közel volt h-hoz, akkor hasonlóan, mint 1-gyel kevesebb dimenzióban, h egy hozzá hasonló h' poliéderbe megy át, a többi $k-1$ hiperlap képe is az eredetivel megegyező kombinatorikus szerkezetű konvex poliéder lesz, ezek ugyanúgy kapcsolódnak, mint az eredetiek, és egy felosztását adják h'-nek. Vagyis a kapott A' 3-dimenziós konvex tartományrendszer ugyanolyan kombinatorikus szerkezetű, mint az eredeti A 4-dimenziós poliéder.

Készítsük el a I. részben megismert három 4-dimenziós szabályos test „kifordítását”! Ez hasznos lesz, mind a „kifordítás” megértése, mind a 4-dimenziós testek megismerése szempontjából. Most is kezdjük a legegyszerűbbel, a 4-dimenziós kockával, a tesszerakttal. Legyen az A tesszerakt egyik (h_1) hiperlapja a T terünkben, így a „szemközti” h hiperlap párhuzamos a terünkkel, és a tesszerakt a kettő között helyezkedik el. Legyen A mondjuk a „felső” féltérben. Legyen P a h kocka „fölött” nagyon kicsivel. Vetítsük a tesszeraktot P-ből a terünkre. Hasonlóan, mint 1-gyel kevesebb dimenzióban, h_1 önmagába, h pedig egy olyan h' kockába megy át, amely koncentrikus h_1-gyel, tartalmazza h_1-et, lapjai párhuzamosak h_1 megfelelő lapjaival. A többi 6 hiperlap képe 6 darab egybevágó, szabályos, négyzet alapú csonkagúla (5. *a ábra*).



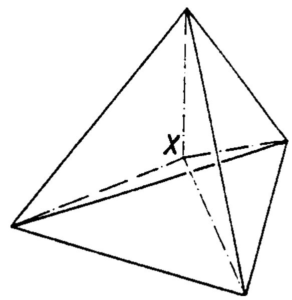
5. a ábra

Ez tehát a tesszerakt 3-dimenziós kombinatorikus modellje. 7 tartománya, 24 lapja, 32 éle és 16 csúcsa van. Ebből is következik, hogy a tesszeraktnak 8 hiperlapja, 24 lapja, 32 éle és 16 csúcsa van. (A hiperlapok száma mindig 1-gyel több, mint a „kifordítás” tartományainak száma, hiszen az egyik (a h) hiperlap képe nem tartomány, hanem a tartományok egyesítése (h').[1] Az is jól látszik például a modellből, hogy a csúcsoknál 4 él, 6 lap és 4 hiperlap, az éleknél 3 lap és 3 hiperlap találkozik.

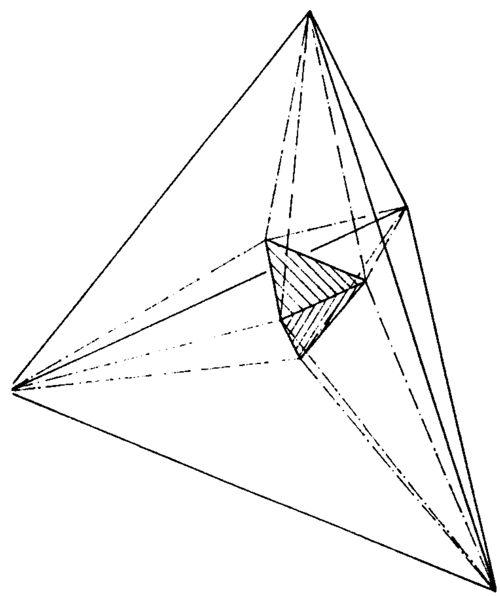
Nézzük a 4-dimenziós szabályos tetraédert. Legyen az egyik (X) csúcsa a terünkben, a szemközti h hiperlapja legyen párhuzamos a terünkkel, és maga a test legyen „fölötte”. Legyen P nagyon kicsivel h középpontja „fölött”. Vetítsük a 4-dimenziós tetraédert P-ből a terünkre! X önmagába megy, h olyan szabályos tetraéderbe, amelynek X

[1] Fel lehet úgy is fogni, hogy h-nak h' komplementere, azaz végtelen tartomány felel meg. A térnek ez a felosztása már teljesen azonos kombinatorikus szerkezetű, mint az eredeti test.

a középpontja, a másik négy hiperlap képe pedig az ábrán látható módon bontja fel ezt a tetraédert 4 egybevágó kis tetraéderre. (X a közös pontjuk (*5.b ábra*)). A 4-dimenziós szabályos oktaédert kifordítva pedig az *5.c ábrát* kapjuk, feltéve, hogy P-megint a h hiperlap középpontja felett választjuk. Ennek ellenőrzését az olvasóra bízom.



5. b ábra



5 c. ábra

A 4-dimenziós eset után már nem nehéz egy n-dimenziós konvex A poliéder „kifordítását” definiálni. Legyen h A-nak egy $(n-1)$-dimenziós hiperlapja, legyen S egy olyan h-val párhuzamos $(n-1)$-dimenziós hipersík, amelyre igaz, hogy A h és S között van. Legyen P elég kicsivel h egy belső pontja „fölött”, azaz a h által meghatározott, A-t nem tartalmazó féltérben. Vetítsük P-ből A-t S-re. A korábbiakkal analóg módon bizonyítható, hogy ez a vetület A-val megegyező kombinatorikus szerkezetű $(n-1)$-dimenziós konvex tartományrendszer lesz. Konvex tartományrendszeren egy konvex poliédernek konvex poliéderekre való felosztását értem. A felosztásban szereplő kis poliéderek korlátos tartományok, a tér fennmaradó része alkotja a végtelen tartományt. (A végtelen tartomány nem konvex, viszont a komplementere igen.)

Mielőtt a „kifordítást” felhasználva belátnánk az n-dinenziós Euler-tételt, előbb vizsgáljuk meg az n-dimenziós szabályos testeket ($n \geqq 5$), és sejtsük meg a tételt! $n \geqq 5$ esetén már csak 3 szabályos n-dimenziós test van: a szabályos tetraéder, a kocka és a szabályos oktaéder általánosítása. (Ezt nem bizonyítjuk.) Ezeket $n = 4$-re már vizsgáltuk az I. részben, majdnem ugyanúgy megy minden $n \geqq 5$-re is.

Nézzük először az n-dimenziós szabályos tetraédert. A 2-, 3- és 4-dimenziós eset analógiájára a élű n- dimenziós szabályos tetraédernek hívok egy n-dimenziós testet, ha $n+1$, páronként a távolságú csúcs, valamint az általuk meghatározott összes k-dimenziós él ($k = 1, 2 \ldots, n-1$) alkotja. (A csúcs 0-dimenziós él, az él 1-dimenziós él, a lap 2-dimenziós él, ..., az $(n-1)$-dimenziós hiperlap $(n-1)$-dimenziós él.) A definícióból, rögtön következik, hogy $a_k = \binom{n+1}{k+1}$ k-dimenziós éle van.

Ugyanúgy, ahogy 4 dimenzióban, ebből a definícióból sem látszik, hogy van ilyen test, de ahogy a 4-dimenziós szabályos tetraédert előállítottuk a 3-dimenziósból, az n-dimenzióst is elő lehet állítani az $(n-1)$-dimenziósból: Vegyünk egy a élű $(n-1)$-dimenziós szabályos $A_1 \ldots A_n$ tetraédert, amelynek középpontja O. $A_1, \ldots, A_n$ közül bármely kettőnek a távolsága a, tehát A_{n+1}-et úgy kell megválasztani, hogy A_iA_{n+1} hossza is a legyen minden $i = 1, \ldots, n$-re. Ezt pedig most is úgy lehet megtenni, hogy O-ban merőlegest állítunk az $(n-1)$-dimenziós térre, és O-ból valamelyik irányban felmérünk $\sqrt{a^2 - OA_i^2}$-t. Így kapjuk A_{n+1}-et, ezt összekötve az összes eddigi csúccsal megkapjuk az n-dimenziós szabályos tetraédert.

Tehát a szabályos háromszögből kiindulva a fenti lépést $(n-2)$-szer végrehajtva megkaphatjuk a szabályos n-dimenziós tetraédert. A 4-dimenziós kockára és a 4-dimenziós oktraéderre is volt olyan előállítás az I. részben, amelyik a 3-dimenziós megfelelőből indult ki. Mindkét előállítás szó szerint végrehajtható akkor is, ha $(n-1)$-dimenziós testből akarunk n-dimenziósat csinálni. Tehát az n-dimenziós szabályos tetraéderhez hasonlóan az n-dimenziós kockát és az n-dimenziós oktaédert is elő lehet állítani rekurzióval $(n-2)$ lépésben a 2-dimenziós megfelelőjükből, vagyis a négyzetből. Az n-dimenzióban is lehet úgy definiálni a szabályos oktraédert, hogy csúcsai az n-dimenziós kocka $(n-1)$-dimenziós hiperlapjainak középpontjai, a szomszédos hiperlapokhoz tartozó csúcsai közötti szakaszok az élei. A két definíció ekvivalenciáját ugyanúgy kell bizonyítani, mint 4 dimenzióban. A koordináta-rendszerben való szép elhelyezés is szó szerint általánosítható 4 helyett az n-dimenziós szabályos testekre.

A vállalkozó kedvűeknek ajánlom, hogy továbbolvasás előtt oldják meg a következő egyszerű feladatot:

Feladat: *Határozzuk meg az n-dimenziós kocka és az n-dimenziós oktaéder k-dimenziós éleinek számát* $(k = 0, 1, \dots n-1.)$

Helyes számolás esetén azt kapjuk, hogy a válasz a feladatra$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ a kocka, és $\binom{n}{k+1} \cdot 2^{k+1}$ az oktaéder esetén. Tetraéderre már korábban láttuk, hogy $\binom{n+1}{k+1}$ a válasz. Jelölje a_k a k-dimenziós élek számát. A 3-dimenziós Euler-tétel ezzel a jelöléssel úgy szól, hogy konvex poliéderekre $a_0 - a_1 + a_2 = 2$. Ha megpróbálunk valami ilyesmit kihozni legalább erre a 3-féle szabályos testre, akkor némi próbálkozás után azt tapasztaljuk, hogy

(1) $$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1}$$

ezekre a testekre igaz. Ezután már reménykedhetünk benne, hogy (1) esetleg igaz tetszőleges konvex poliéderre. Elárulom, hogy nem hiába reménykedünk, be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

Tétel: Minden n-dimenziós konvex poliéderre $(n \geqq 2)$ igaz, hogy

(1) $$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} = 1 + (-1)^{n-1},$$

ahol a_k jelöli a k-dimenziós élek számát.

Ezt a tételt felfoghatjuk minden egyes n-re külön állításként. Adott n-re jelöljük ezt az állítást A_n-nel.

A tételt párhuzamosan fogjuk bizonyítani a következő tétellel:

Tétel: Minden n-dimenziós konvex tartományrendszerre $(n \geqq 1)$ igaz, hogy:

(2) $$l_0 - l_1 + l_2 - l_3 + - \ldots + (-1)^{n-1} l_{n-1} + (-1)^n \cdot l_n = 1\,,$$

ahol l_k a tartományrendszerben lévő k-dimenziós élek számát jelöli $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ esetben; l_n pedig a korlátos tartományok számát jelöli.

Ezt a tételt adott n-re B_n-nel jelöljük.

A tételek bizonyításához a következőket fogjuk belátni:

$\alpha:$ B_1 igaz.

$\beta:$ B_{n-1}-ből következik A_n.

$\gamma:$ B_{n-1}-ből következik B_n. (Ennek bizonyításakor β-t fel fogjuk használni.)

Ez elég, hiszen α-ból és γ-ból következik B_n $n \geqq 1$-re, B_n-ből és β-ból pedig következik A_n $n \geqq 2$-re, és ezek együtt jelentik a két bizonyítandó tételt.

A bizonyítások:

α: Egy 1-dimenziós konvex tartományrendszer egy szakasz pontokkal felosztva kisebb szakaszokra. Erre $l_0 - l_1 = 1$ nyilván teljesül.

β: Vegyünk egy n-dimenziós konvex poliédert. Fordítsuk ki! Kapunk egy $(n-1)$-dimenziós konvex tartományrendszert. Erre tudjuk, hogy (2) igaz, másrészt hogy a kombinatorikus szerkezete megegyezik az eredeti test kombinatorikus szerkezetével, vagyis

(3) $$a_0 = l_0,\ a_1 = l_1,\ \ldots,\ a_{n-2} = l_{n-2},\ a_{n-1} = l_{n-1} + 1,$$

hiszen l_{n-1} a korlátos tartományok száma volt, de van egy végtelen tartomány is. (3)-at beírva (2)-be kapjuk (1)-et.

γ: Ezt az állítást l_n, azaz a korlátos tartományok száma szerinti teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

Nézzük először $l_n = 1$ esetén: $l_n = 1$ azt jelenti, hogy van egy konvex n-dimenziós poliéderünk, ami nincs felosztva. a_k-val jelölve a k-dimenziós éleinek számát:

(4) $$l_0 = a_0,\ l_1 = a_1,\ \ldots,\ l_{n-1} = a_{n-1},\ l_n = 1.$$

B_{n-1}-ből β szerint következik A_n, tehát az a_k számokra (1) teljesül. (1)-ből és (4)-ből viszont triviálisan következik (2).

Azt kell még bebizonyítani, hogy $l_n > 1$ esetén igaz az állítás, feltéve, hogy ugyanezt l_n-nél kevesebb korlátos tartomány esetén már tudjuk.

Legyen $l_n > 1$, és válasszunk ki két szomszédos korlátos tartományt. Mivel ezek konvex poliéderek, ezért egy $(n-1)$-dimenziós S hipersíkkal szétválaszthatók. (A közös határ hipersíkja ilyen hipersík.) S-sel vágjuk ketté az eredeti (B) tartományrendszert. S mindkét oldalán kapunk 1–1 új n-dimenziós tartomány-rendszert, jelöljük ezeket C-vel, illetve D-vel, a k-dimenziós éleik számát c_k-val, illetve d_k-val $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, a korlátos tartományok számát c_n-nel, illetve d_n-nel. A szétvágás során minden korlátos tartományból legfeljebb egy-egy korlátos tartomány keletkezik S két oldalán, viszont a két szétválasztott tartomány csak egy-egy oldalra esik, ezért a korlátos tartományok számára $c_n < l_n,\ d_n < l_n$ teljesül. Ekkor viszont az indukciós feltevés szerint:

(5) $$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + - \ldots + (-1)^n c_n = 1$$

(6) $$d_0 - d_1 + d_2 - d_3 + - \ldots + (-1)^n d_n = 1.$$

S kimetsz B-ből egy $(n-1)$-dimenziós E tartományrendszert. Erre alkalmazva a B_{n-1} tételt:

(7) $$l_0 - l_1 + l_2 + - \ldots + (-1)^{n-2} l_{n-2} + (-1)^{n-1} l_{n-1}$$

a szokásos jelölésekkel.

Vizsgáljuk meg az E tartományrendszert! E-nek egy k-dimenziós éle, illetve egy korlátos tartománya kétféleképpen keletkezhet: vagy az eredeti n-dimenziós B-nek is k-dimenziós éle volt (ezek számát jelöljük f_k-val), vagy egy B egy $(k+1)$-dimenziós élének kettévágásakor keletkezett metszetként. Ezek számát jelöljük g_k-val. Nyilván:

(8) $$l_k = f_k + g_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Számítsuk ki l_k-t $(k = 0, 1, \ldots, n)$ a c_k, d_k, l_n, f_k és g_k értékekből: Számoljuk össze először B csúcsait: B-nek van $c_0 - l_0$ csúcsa S egyik oldalán, $d_0 - l_0$ csúcsa a másik oldalán, f_0 csúcs pedig S-en, tehát

(9) $$l_0 = c_0 - l_0 + d_0 - l_0 + f_0.$$

Számoljuk össze B k-dimenziós éleit $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$: $c_k - l_k$ van S egyik oldalán, $d_k - l_k$ van S másik oldalán, f_k van S-en. Kétszer számoltuk azokat a k-dimenziós éleket, amelyeket S kettévág. Viszont éppen az ilyen kettévágásnál keletkezett $(k-1)$-dimenziós élek számát jelöltük g_{k-1}-gyel, tehát

(10) $$l_k = c_k - l_k + d_k - l_k + f_k - g_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

B korlátos tartományaira továbbá

(11) $$l_n = c_n + d_n - g_{n-1},$$

hiszen c_n van S egyik, d_n a másik oldalán, és kétszer számoltuk a g_{n-1} darab kettévágott tartományt.

A kapott (5)–(11) egyenletekből egyszerűen fog adódni a bizonyítandó (2). A (9), (10), (11)-ből:

$$\begin{gathered}
l_0 - l_1 + l_2 - l_3 + - \ldots + (-1)^{n-1} l_{n-1} + (-1)^n l_n = \\
= (c_0 - l_0 + d_0 - l_0 + f_0) - (c_1 - l_1 + d_1 - l_1 + f_1 - g_0) + - \ldots + \\
+(-1)^{n-1}(c_{n-1} - l_{n-1} + d_{n-1} - l_{n-1} + f_{n-1} - g_{n-2}) + (-1)^n (c_n + d_n - g_{n-1}) = \\
= (c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + - \ldots + (-1)^n c_n) + (d_0 - d_1 + - \ldots + (-1)^n d_n) - \\
- 2(l_0 - l_1 + - \ldots + (-1)^{n-1} l_{n-1}) + \\
+(f_0 - f_1 + - \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1}) + (g_0 - g_1 + - \ldots + (-1)^{n-1} g_{n-1}.
\end{gathered}$$

(5) szerint az első zárójel 1, (6) szerint a második zárójel 1, (7) szerint a harmadik is 1, (8) és (7) szerint az utolsó kettő összege is 1. Tehát:

$$l_0 - l_1 + - \ldots + (-1)^{n-1} l_{n-1} + (-1)^n l_n = 1 + 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 1,$$

és ezt akartuk bizonyítani. Ezzel γ-t beláttuk.

Tehát bebizonyítottuk α, β és γ-t, és a korábbiak szerint ezekből már következnek a tételeink.