

A halmazelmélet egyik legalapvetőbb „trükkje”, hogy egy olyan eljárás elvégezhetőségét teszi fel minden halmazra, amelyet megszámlálható halmazokra el tudunk végezni. A megszámlálható halmazok elemeit fel tudjuk sorolni a szokásos módon; első, második, harmadik elem stb. Azt mondjuk, hogy a megszámlálható halmazok *átrendezhetőek* a természetes számok rendezett halmazához hasonló módon (vagy esetleg egy véges halmazhoz hasonló módon). *Rendezett halmaznak* nevezünk egy  $(A, <)$  párt, ahol  $A$  tetszőleges halmaz,  $<$  pedig egy rajta adott rendezés, tehát teljesülnek a következő tulajdonságok:

- (1)  $x < x$  sohasem áll;
- (2)  $x < y$ ,  $y < z$  esetén  $x < z$  is teljesül;
- (3) Ha  $x, y \in A$ , akkor  $x = y$ , vagy  $x < y$ , vagy  $y < x$ .

Egy  $(A, <)$  rendezett halmazt *jólrendezettnek* nevezünk, ha minden nem üres  $B \subseteq A$  részhalmaznak van legkisebb eleme. A természetes számok halmaza a szokásos rendezéssel könnyen láthatóan jólrendezett, ez a kulcsa a teljes indukciós bizonyításoknak. A véges rendezett halmazok is jólrendezettek. Jólrendezett halmazokra állításokat bizonyíthatunk a teljes indukcióhoz hasonlóan. A bizonyítások kulcsa egyszerű. Elég valamilyen módon azt garantálni, hogy nem lehetséges olyan pont létezése, hogy addig nincs baj, de ott van. Ekkor nem is létezhet pont, ahol baj van, hiszen, felhasználva a jólrendezés definícióját, lenne egy legkisebb ilyen pont is. Ezzel a gondolatmenettel igazolhatjuk például, hogy minden vektortérnek van bázisa.

Sajnos, nem könnyű olyan jólrendezett halmazra példát mutatni, amely nem megszámlálható. Pedig ezt meg lehet tenni, sőt, be lehet bizonyítani, hogy minden halmazra lehet építeni jólrendezést, ehhez azonban szükség van az úgynevezett kiválasztási axiómára. Ennek egy ekvivalens alakja, hogy bármely két halmaz összehasonlítható; valamelyiknek van a másikba beágyazása. Az alábbi állítás hasznos halmazok jólrendezettségének eldöntésekor.

**Állítás.** *Egy  $(A, <)$  rendezett halmaz pontosan akkor nem jólrendezett, ha van benne végtelen csökkenő sorozat.*

**Bizonyítás.** Ha van végtelen csökkenő sorozat, akkor maga a sorozat ad példát legkisebb elem nélküli nem üres részhalmazra. A megfordításhoz tegyük fel, hogy a nem üres  $B \subseteq A$  részhalmaznak nincs legkisebb eleme. Mivel  $B$  nem üres, van benne  $b_0 \in B$  elem.  $b_0$  nem a legkisebb, így van  $B$ -ben  $b_1 < b_0$  elem. Folytatva, kapjuk a csökkenő  $b_0, b_1, \dots$  sorozatot, ami kellett.

Az eddig említetteken kívül példákat kaphatunk jólrendezett halmazra, ha például a természetes számok halmazát két példányban egymás mellé helyezzük, stb. Kissé ravaszabb példát kapunk a következőképpen. Vegyük alaphalmazként a nemnegatív egész együtthatós polinomok  $P$  halmazát. Némi nehézséget okozhat a rendezés kitalálása. Nem igaz ugyanis, hogy ha  $f$  és  $g$  fenti típusú polinomok,  $f \neq g$ , akkor  $f(x) < g(x)$  minden valós  $x$ -re, vagy  $g(x) < f(x)$  minden valós  $x$ -re. Az azonban igaz, hogy egy bizonyos  $a$  értéknél nagyobb  $x$ -ekre  $f(x) < g(x)$  (vagy fordítva elég nagy értékekre  $g(x) < f(x)$ ). Ez onnan látható, hogy feltevésünk szerint  $f(x) - g(x)$  nem nulla polinom, így elég nagy valós számokra állandó előjelű. Ez az előjel egyébként megegyezik a főegyüttható előjével.

Érdemes lenne tehát eszerint definiálni a polinomok rendezését:  $f < g$ , ha minden elég nagy  $x$ -re  $f(x) < g(x)$ . A rendezési tulajdonságok közül egyedül a tranzitivitás belátása okozhat gondot. Tegyük fel tehát, hogy  $f < g$  és  $g < h$ . Egy-egy küszöbértéktől kezdve tehát teljesül  $f(x) < g(x)$ , illetve  $g(x) < h(x)$ . A két küszöbérték közül a nagyobbikat véve, minden annál nagyobb számra  $f(x) < h(x)$  is teljesül, tehát  $f < h$ , amit bizonyítanunk kellett.

Könnnyű eljárást találni arra, hogyan döntsük el két adott polinomról,  $f$ -ről és  $g$ -ről, hogy melyik nagyobb (rendezésünk szerint). Ehhez elég  $f - g$  főegyütthatójának előjelét megnézni. Egy másik módszer a következő. Először hasonlítsuk össze  $f$  és  $g$  fokszámát. Ha ezek különbözőek, akkor a nagyobb fokszámú polinomot nevezzük nagyobbknak. Ha azonos fokszámúak,  $n$ -edfokúak, hasonlítsuk először össze a főegyütthatókat. Ha különbözőek, a nagyobbik nyer. Ha azonosak, vegyük a következő,  $x^{n-1}$ -es tag együtthatóját, hasonlítsuk azokat össze, stb. Megemlítem, hogy ez az eljárás lényegében azonos azzal, ahogy tízes számrendszerben felírt számokat hasonlítunk össze.

A fenti eljárás segítségével könnyű belátni a  $P$  halmaz jólrendezettségét. Legyen ugyanis  $B$  nem üres részhalmaza  $P$ -nek. Célunk  $B$  legkisebb elemét kiválasztani. Nézzük először  $B$  elemeinek fokszámait, legyen ezek közül a legkisebb  $n$ . Ha csak egy  $n$ -edfokú polinom van  $B$ -ben, készen vagyunk, ez lesz  $B$  legkisebb eleme. Különböznél a  $B$ -beli,  $n$ -edfokú polinomok főegyütthatóit, vegyük ezek közül a legkisebbet. (Itt használjuk fel, hogy polinomaink együtthatói nemnegatív egész számok.) Ha ez az érték csak egy polinomnál szerepel, megtaláltuk a legkisebb polinomot. Ha nem, tovább megyünk, és a következő együtthatót nézzük, stb. Legfeljebb  $n$  lépésben megtaláljuk a legkisebb polinomot.

A  $P$  halmaz jólrendezettségét felhasználhatjuk egy érdekes tétel bizonyítására. Vegyünk egy tetszőleges számot, például 266-ot. Írjuk fel kettes számrendszerben:  $266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$ . Cseréljük ki az alapot jelentő ketteseket hármassokra,  $3^8 + 3^3 + 3^1$ , majd a hármass számrendszerben vonjunk le egyet:  $3^8 + 3^3 + 2$ . A következő lépésben ismét növeljük az alapszámot, és vonjunk le egyet:  $4^8 + 4^3 + 1$ . És így tovább. R.L. Goodstein tételének állítása, hogy előbb-utóbb elakadunk; 0-hoz jutunk.

Végiggondolva az eljárást, azt kell belátnunk, hogy nem folytatható minden határon túl, ekkor ugyanis szükségképpen 0-ba kell jutnunk. Ha szereplő számaink csökkenő sorozatot alkotnának, ez nyilvánvaló lenne, de sajnos, a számok nőnek (legalábbis eleinte). Ha a természetes számok jólrendezettségét nem használhatjuk, próbáljuk meg  $P$  jólrendezettségét használni. Az eljárás valamelyik közbülső lépésében megkapott  $a_n g^n + \dots + a_0$  számhoz ( $g$  az aktuális számrendszer alapszáma) rendeljük hozzá az  $a_n x^n + \dots + a_0$  polinomot. Gondoljuk végig, hogy a különböző lépésekben kapott számokhoz rendelt polinomok hogyan viszonyulnak egymáshoz (rendezésünk szerint). A számrendszer alapszámának növelése nem változtatja a hozzárendelt polinomot, hiszen az alapszámot így is, úgy is  $x$ -re cseréljük. Ha a  $g$

alapú számrendszerben egy számot eggyel csökkentünk, akkor az utolsó nem nulla jegyét eggyel kell csökkenteni, az ezután szereplő nullák helyébe pedig  $(g-1)$ -eket kell írni. Mivel polinomjainkat ugyancsak első eltérés szerint hasonlítjuk össze, a második számhoz rendelt polinom kisebb lesz. Ha tehát eljárásunkat végtelenségig folytathatnánk, polinomok végtelen csökkenő sorozatát kapnánk, ami a cikk elején szereplő állítás értelmében ellentmond  $P$  jólrendeztettségének. Így Goodstein tételét beláttuk.

R.L. Goodstein eredeti, 1944-ben bizonyított tétele egy kissé más eljárást alkalmazott, már az első lépésben a kitevőkben, kitevők kitevőiben, stb., szereplő 2-nél nagyobb számokat átírta 2-es számrendszerbe:

$$266 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1.$$

Az ezután kapott számsorozat,

$$3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2, 4^{4^{4+1}} + 4^{4+1} + 1, 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1}, \dots$$

rohamosan nő, legalábbis eleinte. A szereplő számok értéke kb.

$$10^{38}, \quad 10^{616}, \quad 10^{10000}.$$

Mégis a fentihez hasonló bizonyítás mutatja, hogy előbb-utóbb 0-hoz jutunk. Érdekes metamatematikai módszerekkel L. Kirby és J. Paris 1981-ben megmutatta, hogy a legutóbbi állítás a számelmélet eszközeivel nem bizonyítható.

Egy  $(A, <)$  jólrendezett halmaz  $B$  részhalmazát *kezdőszeletnek* nevezzük, ha  $x \in B$ ,  $y < x$ -ből következik  $y \in B$ , tehát  $B$  „lefelé zárt”. Kezdőszeletre példa maga a teljes  $A$  halmaz, továbbá, könnyen láthatóan minden  $A[a] = \{x \in A : x < a\}$  alakú halmaz is, ezeket *elem által alkotott kezdőszeleteknek* nevezzük. Más példa nincs. Legyen ugyanis  $B$  valódi kezdőszelet, legyen a nem üres  $A - B$  halmaz legkisebb eleme  $a$ . Próbáljuk meg belátni, hogy  $B = A[a]$ . Ha  $x < a$ , akkor, mivel  $a$ -nál kisebb elem nem lehet  $A - B$ -ben,  $x \in B$ . Ha valamely  $x \geq a$ -ra  $x \in B$  teljesülne, akkor, mivel  $B$  kezdőszelet,  $a \in B$  is teljesülne, ami ellentmond  $a$  választásának.

A jólrendezett halmazok vizsgálatához alapvetően fontosak a rendezéstartó leképezések. Ha  $(A, <)$ ,  $(B, <)$  jólrendezett halmazok, egy  $f : A \rightarrow B$  függvény *rendezéstartó*, ha  $x < y$  esetén  $f(x) < f(y)$  teljesül. (Tehát szigorú értelemben monoton növény.)

**1. Állítás.** *Ha  $(A, <)$  jólrendezett, és  $f : A \rightarrow A$  rendezéstartó, akkor  $f(x) \geq x$  teljesül minden  $x \in A$ -ra.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, legyen  $x \in A$  egy elem, amire  $f(x) < x$  teljesül. Írjunk  $a_0 = x$ ,  $a_1 = f(a_0)$ -t, majd legyen  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $n = 1, \dots$ -ra. Egyszerű indukcióval kapjuk, hogy  $a_{n+1} < a_n$ , tehát  $a_0, a_1, \dots$  csökkenő sorozat a jólrendezett halmazban, ami lehetetlen.

Két jólrendezett halmaz közötti rendezéstartó bijekciót *hasonlóságnak* (izomorfizmusnak) nevezzük, ekkor a halmazok *hasonlóak*, izomorfak. Jelben  $\simeq$ .

**2. Állítás.** *Jólrendezett halmaz nem lehet hasonló valódi kezdőszeletéhez.*

**Bizonyítás.** Ha  $f : A \rightarrow A[a]$  hasonlóság, akkor  $f(a) < a$ .

**3. Állítás.** *Két jólrendezett halmaz között csak egy hasonlóság lehet.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy  $(A, <)$  és  $(B, <)$  jólrendezett, és  $f, g : A \rightarrow B$  hasonlóság. Az 1. állítást alkalmazva  $g^{-1} \circ f : A \rightarrow A$ -ra,  $g^{-1}(f(x)) \geq x$ , azaz  $f(x) \geq g(x)$  minden  $x \in A$ -ra. Hasonlóan  $f(x) \leq g(x)$  is teljesül, azaz  $f = g$ .

**4. Állítás.** *Ha  $(A, <)$  és  $(B, <)$  jólrendezett halmazok, akkor az alábbi állítások közül pontosan az egyik teljesül:*

- (a)  $(A, <)$  és  $(B, <)$  hasonló;
- (b)  $(A, <)$  hasonló  $(B, <)$  egy valódi kezdőszeletéhez;
- (c)  $(B, <)$  hasonló  $(A, <)$  egy valódi kezdőszeletéhez.

**Bizonyítás.** Hogy (a)–(c) közül több nem teljesülhet, azonnal adódik a 2. állításból, illetve abból, hogy a „hasonló egy szeletéhez” reláció tranzitív. Belátjuk, hogy állításaink közül legalább az egyik teljesül. Legyen tehát adva  $(A, <)$  és  $(B, <)$ .

Legyen  $A' = \{x \in A : \text{van } y \in B, \text{ hogy } A[x] \simeq B[y]\}$  és hasonlóan  $B' = \{y \in B : \text{van } x \in A, \text{ hogy } A[x] \simeq B[y]\}$ . Először is megjegyezzük, hogy  $x \in A'$  esetén csak egy  $y \in B$  van, amire  $A[x] \simeq B[y]$  teljesül, hiszen, ha két ilyen  $y$  lenne, mondjuk  $y_1$  és  $y_2$ , és például  $y_1 < y_2$ , akkor a  $B[y_2]$  jólrendezett halmaz hasonló lenne  $B[y_1]$  valódi kezdőszeletéhez, ami ellentmond a 2. állításnak. Hasonlóan,  $y \in B'$ -hez csak egy  $x \in A$  van, amire  $A[x] \simeq B[y]$ . Nyilvánvaló, hogy így egy bijekciót kapunk  $A'$  és  $B'$  között, nevezzük ezt  $F$ -nek.

$F$  rendezéstartó: ha nem, legyen  $x_1 < x_2$ ,  $y_1 = F(x_1) > F(x_2) = y_2$ , ahol  $x_1, x_2 \in A'$ . Ekkor  $A[x_1]$  valódi kezdőszelete  $B[y_1] \simeq A[x_1]$ -nek, tehát ismét lenne egy jólrendezett halmaz, ami hasonló saját valódi kezdőszeletéhez.

$A'$  (és hasonlóan  $B'$ ) kezdőszelet. Ha ugyanis  $x' < x \in A'$ ,  $A[x] \simeq B[y]$  és  $f$  az izomorfizmus közöttük, akkor  $A[x'] \simeq B[f(x')]$ .

Kaptuk tehát, hogy  $A'$ ,  $B'$  kezdőszeletek,  $F$  pedig köztük hasonlóság. Ha  $A' = A$  vagy  $B' = B$  vagy mindkettő teljesül, készen vagyunk. Ha pedig  $A' = A[x]$ ,  $B' = B[y]$ , akkor definíciónk szerint  $x \in A'$ , de így  $x < x$  lenne, ellentmondás.

A halmazelmélet egyik nevezetes (és hosszú ideig erősen vitatott) axiómája a *kiválasztási axióma*: ha  $B$  olyan halmaz, aminek minden eleme nemüres halmaz, akkor van olyan  $g$  függvény, amely minden  $x \in B$ -hez  $x$  egy elemét rendeli.  $g$  tehát minden  $x \in B$  halmazból *kiválaszt* egy elemet. Ennek segítségével bizonyította be E. Zermelo 1904-ben a jólrendezési tételt.

**A jólrendezési tétel.** *Minden halmaz jólrendezhető.*

**Bizonyítás.** Legyen  $A$  tetszőleges halmaz. Legyen  $B$   $A$  nem üres részhalmazainak halmaza,  $g$  pedig kiválasztási függvény  $B$ -n. Legyen  $E$  a következő halmaz:  $(D, <) \in E$ , ha  $(D, <)$  jólrendezett halmaz,  $D \subseteq A$ , és minden  $x \in D$ -re  $x = g(A - \{y \in D : y < x\})$ . Igaz tehát, hogy  $D$  minden elemét úgy választjuk (miután a megelőzőket már kiválasztottuk) ahogy  $g$  „súgja”. Célunk annak bebizonyítása, hogy van  $(D, <) \in E$ , amire  $D = A$  (és ezzel a bizonyítás kész).

Vegyük  $E$  két tetszőleges elemét:  $(D_1, <)$ ,  $(D_2, <)$ . A 4. állítás szerint ezek vagy hasonlóak, vagy valamelyikük hasonló a másik egy valódi kezdőszeletéhez. Legyen mondjuk,  $f : D_1 \rightarrow D_2$  ez a hasonlóság. Azt állítom, hogy  $f(x) = x$  minden  $x \in D_1$ -re. Valóban, ha ez nem lenne igaz, a jólrendezettség miatt lenne olyan  $x \in D_1$  amire  $f(x) \neq x$ , de  $f(y) = y$  minden  $y < x$ -re. De ekkor  $g(A - \{y : y < x\})$  egyaránt megegyezik  $x$ -szel és  $f(x)$ -szel, ezért az állítás igaz.

$E$  elemei tehát speciális viszonyban vannak egymással: bármely kettő közül az egyik kezdőszelete a másiknak. Legyen  $D'$  az  $E$ -beli  $D$  halmazok egyesítése. Ha  $x, y$  két különböző eleme  $D'$ -nek, és például  $x \in D_1, y \in D_2$ , akkor mivel vagy  $D_1 \subseteq D_2$  vagy  $D_2 \subseteq D_1$  az egyik halmazban mindkét elem benne van. Továbbá, egy adott  $x \in D'$  elemre  $x$ -nek a különböző  $D$ -k szerinti kezdőszelete egybeesik. Ebből adódik, hogy  $D'$ -n a következőképpen rendezést definiálhatunk:  $x <' y$ , ha  $x < y$  egy  $(D, <) \in E$ -ben, vagy ami ugyanaz, minden  $x$ -et és  $y$ -t tartalmazó  $(D, <) \in E$ -ben. Ha  $(D', <)$  nem lenne jólrendezett, lenne benne egy  $x_0, \dots$  végtelen csökkenő sorozat, és ha  $(D, <) \in E$  olyan, hogy  $x_0 \in D$ , akkor a teljes csökkenő sorozat megjelenne  $(D, <)$ -ben, tehát az sem lenne jólrendezett; ellentmondás.

A fentiekből az is könnyen látható, hogy  $x = g(A - \{y \in D' : y <' x\})$  teljesül minden  $x \in D'$ -re. Adódik tehát, hogy  $(D', <) \in E$ . Ha  $D' = A$ , készen vagyunk, ha nem, legyen  $x = g(A - D')$  és legyen  $D = D' \cup \{x\}$ , a következő rendezéssel:  $x > y$ , minden  $y \in D'$ -re. Nyilván  $(D, <) \in E$  (egy pont hozzávétele nem ronthatja le a jólrendezettséget, a  $g$ -re vonatkozó feltétel is könnyen látható), így  $D'$  definíciója szerint  $x \in D'$  lenne, ami lehetetlen.

Nevezzük Hamel-bázisnak a valós számok  $\mathbf{R}$  halmazának egy olyan  $B$  részhalmazát, amire igaz, hogy minden  $x \neq 0$  valós szám egyértelműen áll elő  $x = q_1 b_1 + \dots + q_n b_n$  alakban, ahol  $b_i \in B$ ,  $q_i$  racionális.

**Tétel.** *Van Hamel-bázis.*

**Bizonyítás.** Legyen  $<_w$  jólrendezés  $\mathbf{R}$ -en. Legyen  $B$ -nek eleme egy  $x$  valós szám akkor és csak akkor, ha nincs véges sok  $y_1, \dots, y_n <_w x$ , hogy  $x = q_1 y_1 + \dots + q_n y_n$  alkalmas  $q_i$  racionális számokkal (0-ra úgy tekintjük, hogy van, tehát  $0 \notin B$ ). Belátjuk, hogy ez a  $B$  Hamel-bázis.

Először is igazoljuk, hogy minden  $x \neq 0$  előáll  $x = q_1 b_1 + \dots + q_n b_n$  alakban, ahol  $q_i$  racionális,  $b_i \in B$ . Tegyük fel, hogy ez nem így van, és legyen  $x \in \mathbf{R}$  a  $<_w$  szerinti legkisebb ellenpélda (itt használtuk ki, hogy  $<_w$  jólrendezés). Nyilván,  $x \in B$ , hiszen különben  $x = 1 \cdot x$  jó felírás lenne. Tehát  $B$  definíciója szerint  $x = g_1 y_1 + \dots + g_n y_n$ , ahol  $y_1, \dots, y_n <_w x$ , és az  $x$ -re tett minimalitási feltevés miatt, ezek már mind felírhatók a kívánt módon. De akkor, könnyen láthatóan,  $x$  is; ellentmondás.

Ha valamelyik szám többféleképpen is előállítható lenne, akkor kivonással kapnánk, hogy  $0 = q_1 b_1 + \dots + q_n b_n$  teljesülne, csupa  $q_i \neq 0$  együtthatóval. Feltehető, hogy itt  $b_n$  a  $<_w$  szerinti legutolsó elem, de ekkor átosztással

$$b_n = \left(-\frac{q_1}{q_n}\right) b_1 + \dots + \left(-\frac{q_{n-1}}{q_n}\right) b_{n-1},$$

azaz  $b_n$  előáll  $<_w$  szerint kisebb elemek segítségével, így  $b_n \notin B$ ; ellentmondás.

Hamel-bázis létezése felhasználható olyan  $f(x)$  függvény készítésére, amely nem  $f(x) = cx$  alakú, de kielégíti az  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  azonosságot. Ha ugyanis  $B$  tetszőleges Hamel-bázis és rajta az  $f$  függvény  $f(b)$  értékeit *tetszőlegesen* előírjuk, a többi értéket a következő szabály szerint számíthatjuk ki: ha  $x = q_1 b_1 + \dots + q_n b_n$ , akkor  $f(x) = q_1 f(b_1) + \dots + q_n f(b_n)$ . A Hamel-bázis definíciója miatt ez egyértelmű és könnyen láthatóan kielégíti a fenti azonosságot is. Ilyen függvényre volt szükség Laczkovich Miklós: *Sokszögek átdarabolása* című cikkében, ami a középiskolai Matematikai Lapok 1990. májusi számának 193–202 oldalain jelent meg. Ott arra volt szükség, hogy ha  $\alpha_0$  irracionális szám, akkor lehet egy fenti tulajdonságú  $f$  függvényre  $f(1) = 1$ ,  $f(\alpha_0) = 0$ . Ehhez arra lenne szükség, hogy  $1, \alpha_0 \in B$  teljesüljön egy alkalmas  $B$  Hamel-bázisra. Fenti konstrukciónk ilyen  $B$ -t ad, ha olyan jólrendezést veszünk, aminek első két eleme 1 és  $\alpha_0$ .

Hamel-bázis segítségével igazolható  $\mathbf{R}$ . Rado alábbi tétele is.

**Tétel.** *A valós számok halmaza felbontható megszámlálható sok olyan halmazra, amelyik nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot.*

**Bizonyítás.** Legyen  $B$  egy Hamel-bázis. Rögzítsük továbbá a nem nulla racionális számok egy  $q(1), q(2), \dots$  felsorolását. Osszuk be a valós számokat megszámlálható sok részre a következőképpen. Alkosson 0 magában egy

osztályt. Ha pedig  $x \neq 0$  valós szám, írjuk fel

$$x = q(i_0)b_0 + \dots + q(i_n)b_n$$

alakban, ahol  $b_0 < \dots < b_n$  a Hamel-bázis elemei. Rendeljük számunkhoz hozzá a  $2^{i_0} \cdot 3^{i_1} \cdot \dots$  természetes számot. Tételünkhöz elég azt belátni, hogy nem teljesülhet  $x+y=2z$ , ha ugyanazt a természetes számot rendeltük  $x$ -hez,  $y$ -hoz és  $z$ -hez. Természetesen fel kell tenni, hogy  $x, y, z$  különböző számok. Ez előfordulhat, mert a  $b_i$ -ket nem kódoltuk. Mindenesetre azt tudjuk, hogy számaink felírásában azonos racionális szám-sorozatok vannak. Legyen  $b$  az  $x, y, z$  felírásában szereplő összes  $B$ -beli elemek közül a legkisebb (véges sok valós szám között mindig van legkisebb). Nézzük  $b$  együtthatóját rendre  $x, y, z$ -ben! Mindegyikben ez az együttható  $q(i_0)$  vagy 0, hiszen  $b$  a legkisebb szereplő  $B$ -beli elem. Valamilyenképpen biztosan nem 0, hiszen  $b$  szerepel valahol. Ha tehát  $b$  együtthatója  $x, y, z$ -ben rendre  $u, v, w$ , akkor ezek mind 0-val és  $q(i_0)$ -lal lehetnek egyenlők, továbbá  $x+y=2z$  miatt  $u+v=2w$  is teljesül, ami csak úgy lehet, ha  $u=v=w=q(i_0)$ . Kaptuk tehát, hogy  $x, y, z$  felírásában szereplő első báziselem együtthatója ugyanaz, az eljárást folytatva a második is, stb. Tehát  $x=y=z$ , azaz csak triviális 3-tagú számtani sorozatot kaphatunk.

A fenti bizonyítás ötletével J. Ceder az alábbi meglepő tételt igazolta.

**Tétel.** *A sík felbontható megszámlálható sok részre, hogy egyik se tartalmazza egy egyenlő oldalú háromszög mindhárom csúcsát.*

**Bizonyítás.** Gondoljuk végig, hogyan általánosíthatnánk az előző tétel bizonyítását. Beláttuk, hogy bizonyos feltételek mellett egy  $F$  test feletti  $V$  vektortér felbontható megszámlálható sok részre, hogy egyik se tartalmazza egy  $\alpha x + \beta y = z$  alakú egyenlet megoldását, ahol  $\alpha, \beta \in F$ . Felhasználtuk, hogy  $F$  megszámlálható, hogy van  $V$ -nek egy  $B$  bázisa, hogy  $B$ -nek van rendezése. Ez utóbbi nem lényeges követelmény, hiszen tudjuk, minden halmaz rendezhető, sőt jólrendezhető. Végül felhasználtuk, hogy egyenletünknek nincsen olyan  $u, v, w$  megoldása, aminek mindhárom tagja 0-val vagy egy adott  $t \in F$  elemmel egyenlő, de nem mindhárman egyenlők. Ez teljesül, ha  $\alpha + \beta = 1$  és persze  $\alpha, \beta \neq 0, 1$ .

Próbáljuk meg ezt az ötletet alkalmazni tételünkben. Tekintsük a sík pontjait komplex számoknak. Tegyük fel, hogy  $x, y, z$  egy egyenlő oldalú háromszög három csúcsa. Ekkor például  $z$  kifejezhető  $x$  és  $y$  segítségével a következőképpen:

$$z = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) x + \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) y.$$

Ez jó is lenne, a baj az, hogy  $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  nincs a racionális számok között. A fenti bizonyítás végrehajtásához elég lenne egy olyan megszámlálható testet találni, amelyben ezek az elemek benne vannak. Ez a szerkesztésmélemből közismert: a  $p + q\sqrt{3}i$  alakú számok összessége, ahol  $p$  és  $q$  tetszőleges racionális szám lehet. Hogy a komplex számsík e fölött a test fölött vektorteret alkot, kevésbé szemléletes, de könnyen adódik abból a tényből, hogy test részteste fölött mindig vektortér.

Erdős Pál sejtje, hogy Ceder tétele általánosítható egyenlő szárú háromszögekre. Könnyen látható, hogy a fenti bizonyítás nem működhet; az egyenlő szárú háromszög két csúcsa nem határozza meg a harmadikat. Erdős Pál azt is sejtje, hogy ez igaz magasabb dimenziós euklideszi terekben is, de ezek a problémák még megoldatlanok.

**Feladatok. 1.** *Hány kezdőszelete van a racionális számok (szokásos módon rendezett) halmazának?*

**2.** *Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendezett halmaz nem jólrendezett, akkor van benne olyan valódi kezdőszelet, amely nem elem által alkotott!*

**3.** *Adjunk meg két rendezett halmazt, hogy egyik se legyen hasonló a másik egy kezdőszeletéhez!*

**4.** *Bontsuk fel a valós számok halmazát megszámlálható sok részre, hogy egyik se tartalmazza az  $x+y=z$  egyenlet nemtriviális megoldását!*