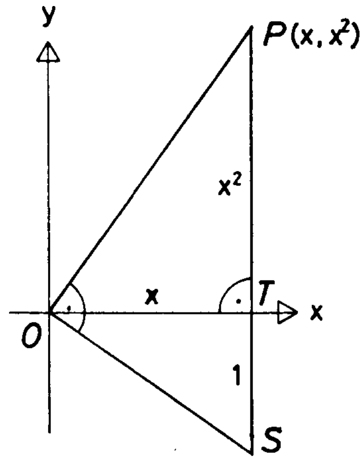
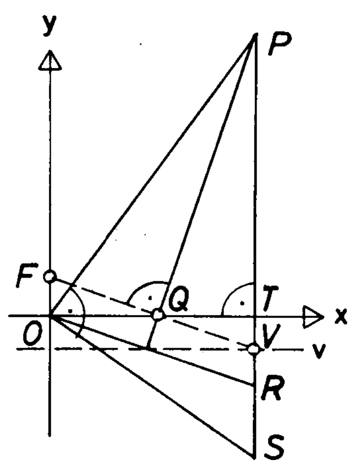
Már az általános iskolában szokás az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját *parabolának* nevezni, másfelől az I. gimnáziumban definiálják a parabolát, mint adott ponttól (fókusz) és rá nem illeszkedő egyenestől (vezéregyenes) egyenlő távolságra lévő pontok halmazát a pont és az egyenes síkjában. Azt, hogy a fenti két tulajdonság ugyanazt a görbét határozza meg, általában harmadik osztályban szokták igazolni a koordinátageometria felhasználásával.



1. ábra

Az alábbiakban a hasonlóság fogalmának a felhasználásával bebizonyítom, hogy a parabola valóban parabola. Ehhez először induljunk ki az $f(x) = x^2$ függvény grafikonpontjainak egy lehetséges szerkesztéséből *(1. ábra)*. A szerkesztést elegendő a pozitív abszcisszájú pontokra megadni, hisz a grafikon szimmetrikus az y-tengelyre.

Mérjük föl az origóból az x tengelyre az x hosszúságú OT szakaszt, majd T-ben merőlegest állítva legyen $TS = 1$, az ábra szerint. Ekkor SO-ra O-ban merőlegest állítva P a grafikon x abszcisszájú pontja lesz, hiszen a *magasságtétel* miatt TS, TO és TP egy mértani sorozat három szomszédos eleme.



2. ábra

Most megmutatjuk, hogy az így szerkesztett P pontok egyenlő távolságra vannak egy ponttól és egy egyenestől. Ha Q és R jelöli az OT és a TS szakaszok felezőpontját *(2. ábra)*, akkor mivel az OTS háromszöget $+90°$ szögű forgatva nyújtással kapjuk a PTO háromszögből, az e transzformáció során egymásnak megfelelő PQ és OR szakaszok is merőlegesek. Így viszont PQ az OTR háromszög OR rel párhuzamos QV középvonalára is merőleges. Mivel pedig Q felezi az OT szakaszt, e középvonalnak a párhuzamos PT és OF egyeneseken adódó F és V metszéspontjaira $QF = QV$. Az FPV háromszög így egyenlő szárú, $PF = PV$, a P pont tehát egyenlő távol van az F ponttól és V -től és így a V-n átmenő, x tengellyel párhuzamos v egyenestől. Mivel az F pontra $OF = 1/4$, a V pontra pedig $TV = 1/4$, az F pont és a v egyenes nem függ a T pont kiválasztásától – azaz az x értékétől.

Megjegyzések:

1) Szigorúan véve a fenti gondolatmenetből csak annyi következik, hogy a függvénygörbe minden pontja eleme az $F(0; 1/4)$ fókuszú, $v \sim y = -1/4$ egyenletű vezéregyenesű parabolának. Annak igazolását, hogy e parabola minden pontja előáll grafikonpontként, az Olvasóra hagyjuk.

2) A fentiekből már következik, hogy tetszőleges

$$q(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

másodfokú függvény grafikonja is parabola, hiszen ismeretes, hogy q grafikonja hasonlósági transzformációval kapható f grafikonjából, másfelől a parabola definíciója alapján nyilvánvaló, hogy hasonlósági transzformáció során parabola képe parabola.

3) Akik jobban ismerik a parabola tulajdonságait, felismerhetik, hogy a bizonyításban kulcsszerepet játszó PQ egyenes éppen a parabola P-beli érintője, ami a bizonyítás hátterére is jobban rámutat.

Felhívás: Hasonló kettősség van a *hiperbola* elnevezés középiskolai használatában is, ami egyfelől a $h(x) = 1/x$ függvény grafikonjának a neve, másfelől pedig azon P pontok halmaza a síkban, melyekre két megadott ponttal (F_1 és F_2) fennáll, hogy $\mid PF_1 - PF_2 \mid$ állandó. Hiperbola-e a hiperbola? A kérdés koordinátageometriai eszközökkel tisztázható. Olvasóinktól viszont azt várjuk, hogy a fenti bizonyításhoz hasonlóan elemi eszközökkel igazolják a két értelmezés egyenértékűségét.