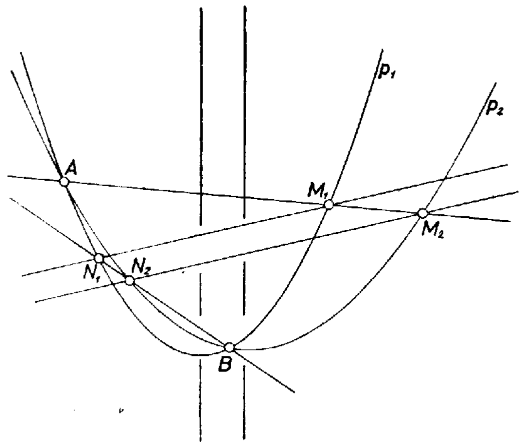
Az állítást a koordinátageometria eljárásaival bizonyítjuk. Válasszuk koordináta-rendszerünk tengelyeit és hosszúságegységét úgy, hogy p_1 egyenlete a következő legyen:

$$y = x^2. \tag{1}$$

Ekkor p_2 egyenlete, a szimmetriatengelyek párhuzamossága alapján

$$y = qx^2 + rx + s, \tag{2}$$

alakú, ahol a $q(\neq 0)$ állandót p_2 (geometriai) paramétere határozza meg, az r, s állandókat pedig p_2-nek p_1-hez képest elfoglalt helyzete.



Az A, B pontok x_A, x_B abszcisszái az (1), (2) rendszerből a

$$(q-1)x^2 + rx + s = 0 \tag{3}$$

egyenlet gyökei, ahol – mivel A és B léteznek és különbözők –

$$q - 1 \neq 0, \quad r^2 - 4(q-1)s > 0,$$

és ekkor a gyökök és az együtthatók közti ismert összefüggés alapján

$$(q-1)(x_A + x_B) = -r. \tag{4}$$

Jelöljük még az M_i, N_i pont $(i = 1, 2)$ abszcisszáját rendre m_i-vel, n_i-vel, így a p_2 húregyeneseként az M_2N_2 egyenes iránytangense

$$\frac{(gm_2^2 + rm_2 + s) - (qn_2^2 + rn_2 + s)}{m_2 - n_2} = q(m_2 + n_2) + r. \tag{5}$$

Ebből úgy kapjuk M_1N_1-nek, a p_1 húregyenesének iránytangensét, hogy a 2-es indexeket 1-esre cseréljük, másrészt (2) és (1) összehasonlítása alapján $q = 1$-et és $r = s = 0$-t írunk:

$$m_1 + n_1, \tag{6}$$

és a feltevések alapján azt kell megmutatnunk, hogy e két iránytangensből képzett

$$D = g(m_2 + n_2) + r - (m_1 + n_1) \tag{7}$$

különbség értéke 0.

Hasonlóan számíthatjuk ki más szereplő húrok iránytangensét is: az AM_1, AM_2 egyenesek meredekségét például úgy kaphatjuk meg a fenti eredményből, ha N_1, illetve N_2 szerepét az A pontnak adjuk át, vagyis (6)-ban n_1, illetve (5)-ben n_2 helyére x_A-t írunk. Ez a két meredekség egyenlő, hiszen az A, M_1, M_2 pontok egy egyenesen vannak, tehát a különbségük 0:

$$g(m_2 + x_A) + r - (m_1 + x_A) = 0. \tag{8}$$

Ugyanígy, B-t véve M_1 és M_2 helyére, az egybeeső BN_2 és BN_1 egyenesek iránytangenseinek egyenlőségéből

$$g(x_B + n_2) + r - (x_B + n_1) = 0. \tag{9}$$

Vonjuk le (7)-ből (8)-at és (9)-et

$$D = -(q-1)(x_A + x_B) - r,$$

erről pedig (4) alapján látjuk, hogy értéke valóban 0. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A (4) összefüggéssel látszólag nem használtuk ki teljes mértékben, hogy x_A és x_B a (3) egyenlet gyökei, ti. szorzatukról fel sem írtuk a $(g-1)x_Ax_B = s$ összefüggést, ami a (3)-mal együtt egyértelmű lenne a gyököknek képlettel való felírásával. Azonban (8) és (9) megállapításában szóban használtuk fel, hogy pl. A játszhatja N_2 és N_1 szerepét.