Első forduló

1. feladat. *Egy zárt tartályban összesen* 2,2 kg *tömegű, héliumból és oxigénből álló gázkeverék van* 0 °C *hőmérsékleten. A gázkeverékkel* 143 500 *joule hőt közöltünk és hőmérséklete* 50 °C*-kal, nyomása* 13 740 pascallal *növekedett.*

a) *Mennyi mindegyik gáz tömege?*
b) *Mekkora volt a gázkeverék eredeti nyomása?*
c) *Mekkora az edény térfogata?*

A hélium molhője állandó térfogaton 12 300 J/(kmol · K), *az oxigén molhője állandó térfogaton* 20 500 J/(kmol · K).

Megoldás. *a*) A héliumból x, az oxigénből y kmol van jelen. Az egyenletek:

$$4x + 32y = 2{,}2,$$
$$(12\,300x + 20\,500y) \cdot 50 = 143\,500.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$x = 0{,}15 \text{ kmol}; (0{,}6 \text{ kg}),$$
$$y = 0{,}05 \text{ kmol}; (1{,}6 \text{ kg}).$$

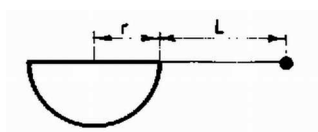
b) Gay-Lussac második törvénye szerint:

$$\frac{p}{273} = \frac{p + 13\,740}{323}, \quad \text{innen} \quad p = 0{,}75 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

c) Összesen $0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$ kmol gázunk van, ennek normáltérfogata $0{,}2 \cdot 22{,}4 = 4{,}48$ m^3. Boyle–Mariotte törvénye szerint:

$$1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 4{,}48 = 0{,}75 \cdot 10^5 \cdot V, \quad \text{innen} \quad V = 6{,}05 \text{ m}^3.$$

2. feladat. *Egy* $r = 0{,}5$ méter *sugarú félhenger vízszintes helyzetben rögzítve van (1. ábra). Széléhez* L *hosszúságú fonál van erősítve.*



1. ábra

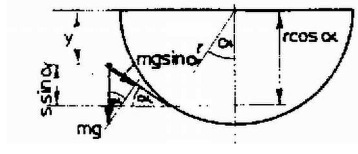
Vízszintes helyzetből elengedjük a fonál végén levő testet. Amikor a fonál végén levő test fölfelé halad, akkor egy bizonyos helyzetben a fonál lazává válik. Ebben a pillanatban a fonál szabad részének hossza $s = 0{,}96r = 0{,}48$ méter. *Mennyi a fonál teljes hossza?*

Megoldás. A meglazulás pillanatáig a fonál szabad része a félhenger érintőjeként helyezkedik el a mozgás során. Könnyű belátni, hogy a meglazulás pillanatában az érintési ponttól a test felé a fonál a 2. ábrán látható módon emelkedik. Az m tömeg helyzetét az α szöggel jellemezhetjük, így a test y mélysége a következő módon fejezhető ki:

$$y = r \cdot \cos\alpha - s \cdot \sin\alpha.$$

A test sebessége az energiatétel alapján:

$$v^2 = 2gy = 2g(r \cdot \cos\alpha - s \cdot \sin\alpha).$$



2. ábra

A meglazulás pillanatában a kötélerő nulla, ezért az s sugarú körpályán tartáshoz szükséges centripetális erőt egyedül a nehézségi erő fonálmenti komponense szolgáltatja:

$$mg \cdot \sin\alpha = m\frac{v^2}{s}.$$

A sebességre kapott eredmény felhasználásával:

$$s \cdot \sin\alpha = 2 \cdot (r \cdot \cos\alpha - s \cdot \sin\alpha),$$

amiből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2r}{3s} = \frac{2r}{3 \cdot 0{,}96r} = 0{,}694, \quad \text{mivel} \quad s = 0{,}96r.$$

Ebből a keresett szög:

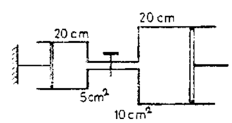
$$\alpha = 34{,}8^\circ = 0{,}607 \text{ radián}.$$

A fonál teljes hossza:

$$L = s + \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) r = 3{,}14r = 1{,}57 \text{ m},$$

vagyis a fonál teljes hossza megegyezik a félkör kerületével.

3. feladat. *Egy* $5\ \mathrm{cm}^2$ *és egy* $10\ \mathrm{cm}^2$ *alapterületű hengert vékony cső köt össze, amelyet csappal lehet elzárni. A hengerek az asztalon fekszenek. Mindegyik hengerben* 20 cm *hosszúságban* $10\ \mathrm{N/cm}^2$ *nyomású levegő van. A külső légköri levegő nyomása is* $10\ \mathrm{N/cm}^2$. *A bal oldali dugattyút fonál köti a falhoz (3. ábra). A hőmérséklet állandó marad.*



3. ábra

a) *Elzárt csap mellett a jobb oldali dugattyút addig húzzuk ki, amíg a jobb oldali hengerben a légoszlop hossza* 25 cm *lesz. Milyen most a bal oldali hengerben a légoszlop hossza?*

b) *Ezután kinyitjuk a csapot és elengedjük a jobb oldali dugattyú fonalát. Milyen hosszú ezután a bal oldali hengerben a légoszlop hossza?*

Megoldás. *a*) Ha a jobb oldali hengerben a légoszlop hossza 25 cm/20 cm=5/4-szeresére nő, akkor benne a nyomás 4/5-részére csökken, vagyis $4/5 \cdot 10 = 8\ \mathrm{N/cm}^2$ értékű lesz. Így a külső és a belső nyomás különbsége $2\ \mathrm{N/cm}^2$, tehát a jobb oldali dugattyú fonalát $2\ \mathrm{N/cm}^2 \cdot 10\ \mathrm{cm}^2 = 20$ N erővel kell tartanunk. Az egész rendszer akkor van egyensúlyban, ha a bal oldali dugattyú fonalában is 20 N erő lép fel. Ennek oka az, hogy a külső és belső nyomások különbségéből származó erők a dugattyún, illetve a dugattyúval szemben levő falon megegyeznek, tehát a két henger – mint egyetlen merev test – így van egyensúlyban. A bal oldali hengerben a nyomáskülönbség (20 N)/(5 cm^2)=4 $\mathrm{N/cm}^2$, vagyis ott a nyomás 10-4=6 N/ cm^2 értékű, tehát a légoszlop hossza a bal oldalon:

$$20 \cdot \frac{10}{6} = 33{,}33 \text{ cm}.$$

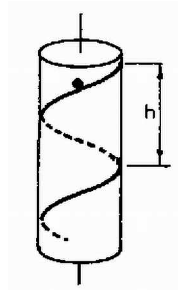
b) Ha a jobb oldali dugattyú fonalát elengedjük, akkor az előzőek alapján a külső és a belső nyomások meg fognak egyezni, vagyis az eredeti 100+200=300 cm^3-es össztérfogat visszaáll. A feladat megoldása határozatlan, hiszen csak azt köti ki, hogy a két hengerben az össztérfogat 300 cm^3 legyen, az egyes hengerekben ezen belül a térfogat tetszőlegesen változhat a csap kinyitása és a fonál elengedésének körülményeitől függően.

Ha először a fonalat engedjük el, és csak később nyitjuk ki a csapot, akkor természetesen a kezdeti állapotba jutunk vissza (ekkor a csap kinyitásának nincs szerepe).

Ha először a csapot nyitjuk ki, miközben a dugattyúkat rögzített helyzetben tartjuk, akkor a kettős henger jobbra elmozdul, hiszen a levegő a nagyobb nyomású helyről átáramlik az alacsonyabb nyomású hengerbe. A folyamat a közös nyomás eléréséig tart. A két oldalon a fonalakban meg kell egyeznie az erőknek, ami a nyomáskülönbség és a felület szorzataként adható meg. Mivel a két hengerben a felület eltérő, a szorzat csak akkor egyezhet meg, ha a nyomáskülönbség nulla, vagyis a rendszerben visszaáll a 10 $\mathrm{N/cm}^2$-es nyomás. Könnyű belátni, hogy ekkor a jobb oldali hengerben a légoszlop 1,67 cm hosszú, míg a bal oldalon 56,67 cm hosszú lesz, hiszen így az össztérfogat: $1{,}67 \cdot 10 + 56{,}67 \cdot 5 = 300\ \mathrm{cm}^3$, továbbá a két légoszlop teljes hossza $1{,}67 + 56{,}67 = 33{,}33 + 25 = 58{,}33$ cm változatlan marad. Ekkor viszont a fonál elengedése lesz hatástalan a továbbiakra.

Ha viszont egyszerre engedjük el a fonalat és nyitjuk ki a csapot, akkor a végállapotot a henger és a dugattyú, illetve a henger és az asztal közötti súrlódási viszonyok határozzák meg, amit eddig a feladatban hallgatólagosan elhanyagolhatónak tekintettünk. Így a végállapot a feladat szerint valóban határozatlan.

4. Feladat. *Egy* $R = 0{,}2$ méter *sugarú tömör hengert tengelyének végpontjaiban tű-csapágyak tartanak. A henger palástján levő csavarvonalú pályán súrlódásmentesen lecsúszik egy test, amelynek tömege a henger tömegének ötöde* (4. ábra). *A csavarvonal menetmagassága* $h = 0{,}2$ méter. $g = 10\ \mathrm{m/s}^2$.



4. ábra

a) *Mekkora lesz a test sebessége az indulástól számítva* $h = 0{,}2$ méteres *szintkülönbség megtétele után?*
b) *Mennyi idő alatt éri el a test ezt a sebességet?*

Megoldás. A lecsúszó test földhöz viszonyított sebességének vízszintes összetevője v_1, függőleges összetevője v_2. A lecsúszó test tömege m, a henger tömege 5 m, a henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = 2{,}5\ mR^2 = 0{,}1\ m$; a henger szögsebessége ω.

a) Az energiamegmaradás tétele szerint:

$$0{,}5m(v_1^2 + v_2^2) + 0{,}5\omega^2\Theta = mgh.$$

Az impulzusnyomaték megmaradása következtében:

$$mv_1R = \omega\Theta.$$

A $h/(2\pi R)$ meredekségű lejtőn a kényszerfeltétel meghatározásakor a henger kerületi sebességét is figyelembe kell venni:

$$\frac{v_2}{v_1 + R\omega} = \frac{h}{2\pi R}.$$

A számadatok behelyettesítése után:

$$v_1^2 + v_2^2 + 0{,}1\omega^2 = 4; \quad v_1 = 0{,}5\omega; \quad v_2 = 0{,}16(v_1 + 0{,}2\omega).$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\omega = 3{,}32\ \mathrm{s}^{-1}; \quad v_1 = 1{,}66\ \mathrm{m/s}; \quad v_2 = 0{,}37\ \mathrm{m/s}.$$

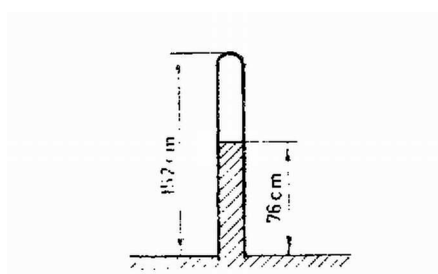
A lecsúszó test sebessége:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1{,}70\ \mathrm{m/s}.$$

b) Egyenletesen gyorsuló mozgás jön létre, $tv_2/2 = h$, $t = 1{,}08$ s.

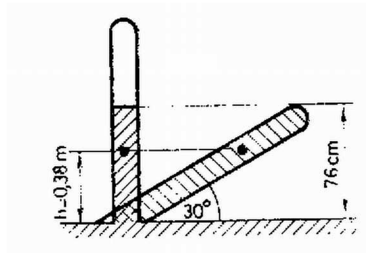
Második forduló

1. feladat. *Egy* 152 cm *hosszú,* 2 cm^2 *keresztmetszet-területű csőben a higany* 76 cm *magasan áll, felette légüres tér van* (5. ábra). *Mennyi a munkavégzés, amikor a csövet lassan ferde helyzetbe hozzuk úgy, hogy végül* 30°*-os szöget zár be a vízszintessel? Az üvegcső tömege* 0,566 kg, *a higany sűrűsége* 13,6 g/cm^3, $g = 10\ \mathrm{m/s}^2$.



5. ábra

Megoldás. A feladatban kérdezett munkavégzés az általunk végzett munkát jelenti, amit az energia-, illetve munkatétel alapján határozhatunk meg. Figyelembe kell vennünk a higany és az üvegcső helyzeti energia változását, továbbá a külső levegő által végzett tágulási munkát, hiszen a külső légnyomás hatására telik meg teljesen az üvegcső higannyal a 6. ábrán látható módon.



6. ábra

Vegyük észre, hogy a higany súlypontja az üvegcső megdöntése közben nem változik, míg a higany mennyisége végül éppen megkétszereződik, hiszen mire a cső eléri a vízszintessel bezárt 30°-os szöget, az üvegcső teljesen megtelik higannyal. A higany tömege: $m_{\mathrm{Hg}} = 13{,}6\ \mathrm{g/cm^3} \cdot 2\ \mathrm{cm^2} \cdot 76\ \mathrm{cm} = 2{,}067\ \mathrm{kg}$. A higany helyzetienergia-változása:

$$\Delta E_{\mathrm{Hg}} = m_{\mathrm{Hg}} g \cdot h = 2{,}067\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}38\ \mathrm{m} = 7{,}86\ \mathrm{J}.$$

Az üvegcső helyzetienergia-változása:

$$\Delta E_{\text{üveg}} = -m_{\text{üveg}} g \cdot h = -0{,}566 \cdot 10 \cdot 0{,}38 = -2{,}15\ \mathrm{J}.$$

A külső levegő munkavégzése

$$W_{\mathrm{lev.}} = -p\Delta V = -\varrho_{\mathrm{Hg}} \cdot g \cdot 2h \cdot \Delta V = -15{,}71\ \mathrm{J}.$$

Az általunk végzett munka:

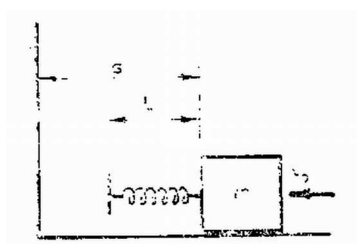
$$W = +7{,}86\ \mathrm{J} - 15{,}71\ \mathrm{J} - 2{,}15\ \mathrm{J} = -10\ \mathrm{J}.$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy a cső magától is eldőlne, a kísérletezőnek vissza kell tartania a csövet döntés közben.

2. feladat. *Vízszintes talajon mozgó,* $m = 1$ kg *tömegű testnek* $v_0 = 2$ m/s *kezdősebességet adunk. Induláskor a téglatest* $s = 1$ méter *távolságra volt a faltól. A testhez* $L = 8$ cm *hosszúságú,* $D = 100$ N/m *rugóállandójú rugó van erősítve (7. ábra). A súrlódási együttható* $\mu = 0{,}2$, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

a) *Hol fog a téglatest megállni?*

b) *Mikor fog a téglatest megállni?*



7. ábra

Megoldás. A téglatest rugója $s - L = 0{,}92$ m megtétele után éri el a falat. Ekkor sebessége $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g(s-L)} = 0{,}566$ m/s. Az ehhez szükséges idő:

$$t_1 = \frac{s-L}{v} = \frac{2(s-L)}{v_0 + v_1} = 0{,}717\ \mathrm{s}.$$

Ezután a test még x_1 utat tesz meg a fal felé a megállásig: az $\dfrac{m \cdot v_1^2}{2} = \mu m g x_1 + \dfrac{D}{2} x_1^2$ egyenlet alapján $x_1 = 0{,}04$ m. Ezalatt a test olyan rezgést végzett, amelynek körfrekvenciája $\omega = \sqrt{D/m} = 10\ \mathrm{s^{-1}}$, amplitúdója $A = x_1 + x_0$, ahol $x_0 = \mu m g / D = 0{,}02$ m. Ugyanis a súrlódási erő x_0 rugómegnyúlás esetén tart egyensúlyt a rugóerővel. Az amplitúdó $A = 0{,}04 + 0{,}02 = 0{,}06$ m. Ha az egyensúlyi helyzetből indítanánk ezt a rezgést, akkor a megállásig $T/4 = (2\pi/\omega)/4 = 0{,}157$ s telne el. Azonban nem 0-ból, hanem t-ből indul el a negyednél kisebb rezgés, melyet a következő egyenletekből határozhatunk meg:

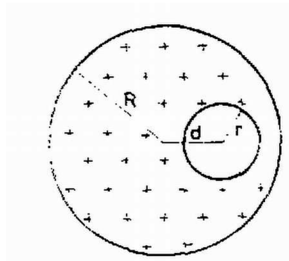
$$x_0 = A \cdot \sin \omega t; \quad v_1 = A\omega \cdot \cos \omega t.$$

Így $t = 0{,}034$ s. Az első megállásig tartó idő: $t_2 = T/4 - t = 0{,}123$ s.

Visszafelé mozogva a súrlódási erő előjelet vált, az egyensúlyi helyzet eltolódik a rugó nyújtatlan helyzetétől balra x_0-lal. Az új amplitúdó: $A_1 = x_1 - x_0 = 0{,}02$ m. Ez azt jelenti, hogy a test egy félperiódus után megáll, akkor a rugó nyújtatlan, a mozgás befejeződik. Ez az időtartam: $t_3 = T/2 = \pi/10 = 0{,}314$ s.

a) A test a faltól 8 cm távolságra áll meg, ekkor a rugó nyújtatlan.
b) A teljes mozgási idő: $t_1 + t_2 + t_3 = 0{,}717 + 0{,}123 + 0{,}314 = 1{,}154$ s.

3. feladat. *Egy hosszú, R sugarú, szigetelő anyagból készült hengerben r sugarú hengeres furat van. A henger és a furat tengelyei párhuzamosak, a tengelyek távolsága d (8. ábra). A szigetelő anyagnak pozitív elektromos töltése van, amelynek térbeli eloszlása egyenletes és sűrűsége ϱ. A szigetelő anyag relatív dielektromos állandója 1. Mekkora az elektromos térerősség a furat belsejében?*



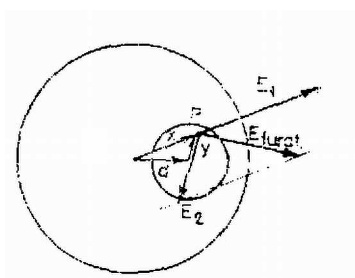
8. ábra

Megoldás. A Gauss-tétel alapján könnyen meghatározhatjuk az egyenletesen töltött henger belsejében az elektromos térerősséget. Tekintsünk ugyanis egy hengerszimmetrikusan elhelyezkedő, h magasságú, x sugarú hengerpalástot a hengerben:

$$E \cdot 2x\pi \cdot h = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\varrho x^2 \pi h;$$
$$E = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\,x,$$

vagyis a térerősség a sugárral lineárisan nő, iránya éppen sugárirányú. A furatot úgy is elképzelhetjük, mintha a pozitív töltés mellett ugyanolyan sűrűségű negatív töltést is tartalmazna. Így a furatban a térerősség két, egymáshoz képest eltolt henger terének szuperpozíciójaként áll elő a 9. ábrán szemléltetett módon:

$$\mathbf{E}_{\text{furat}} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{x} - \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{y} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$



9. ábra

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ vektorkülönbség éppen a két középpontot összekötő $\mathbf{d}$ vektorral egyezik meg, tehát a furatban a térerősség mindenhol $\mathbf{d}$ irányú, homogén:

$$\mathbf{E}_{\text{furat}} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\,\mathbf{d}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy ez nem csak henger esetén igaz, hanem például gömb belsejében levő gömb alakú üregben is hasonló homogén tér alakul ki. Ez annak a következménye, hogy egyenletesen töltött gömb belsejében is a sugárral arányos a térerősség.

Kísérleti forduló

A versenyzőknek a Bunsen-féle effúzióméter egyszerűsített modelljével kellett méréseket végezniük. Levegővel és egy ismeretlen gázzal dolgoztak, amelynek relatív molekulatömegét és lehetséges összetételét is meg kellett határozniuk.

Végezetül ezúton is szeretnénk adózni Vermes Miklós tanár úr emlékének, aki sok-sok éven át a fizika OKTV II. és III. kategóriája tantárgyi bizottságának elnöke volt. A fenti feladatsor volt az utolsó, amelyet a bizottság az ő irányításával állított össze, a verseny befejezését halála miatt nem érhette meg.

I. kategória**A verseny végeredménye**

I. kategória

1. Hortoványi Ottó (Debrecen, Mechwart A. Gépip. Szki., IV. o. t., t: dr. Kopcsa József), **Jávorka László** (Pécs, Zipernovszky K. Ip. Szki., IV. o. t., t: Kiss Jenő). **3. Husztek Szabolcs** (Miskolc, Kandó K. Ip. Szki., IV. o. t., t: Ambrózy Béla. **4. Németh Tibor** (Szombathely, Savaria Közl. Szki., t: Gümdischné Gajzágó Mária). **5. Jakó Attila** (Budapest, Latinca S. Szki., III. o.t., t: Pataki Anikó).

II. kategória

1. Boncz András (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o. t., t: Pálovics Róbert). **2. Sándor Balázs** (Budapest, Árpád Gimn., IV. o. t., t: Tóth Ibolya). **3. Falus Péter** (Budapest, Ságvári E. Gimn., III. o. t., t: dr. Honyek Gyula). **4. Csilling Ákos** (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t., t: Horváth Gábor). **5. Káli Szabolcs** (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t., t: Horváth Gábor). **6. Bartsch Tamás** (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t., t: Lancsa Jánosné). **7. Czirók András** (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t., t: dr. Zsudel László és Dolák Gabriella). **8. Pusztai Tamás** (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t., t: Kiss Zoltánné). **9. Szász Róbert** (Debrecen, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t., t: Türk Zsuzsanna). **10. Dobler Ervin** (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t., t: Horváth Gábor).

III. kategória

1. Juhász Attila (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., IV. o. t., t: Holics László). **2. Rékasi János** (Gyöngyös, Berze Nagy J. Gimn., IV. o. t., t: Kiss Lajos). **3. Bodor András** (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., III. o. t., t: Zsigri Ferenc). **4. Horváth Tibor** (Kecskemét, Katona J. Gimn., IV. o. t., t: Kocsisné Domján Edit). **5. Molbnár Ingó** (Gyöngyös, Berze Nagy J. Gimn., IV. o. t., t: Kiss Lajos). **6. Zóka Gábor** (Nagyatád, Ady E. Gimn., IV. o. t., t: Knapp Ottó). **7. Bak János** (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., IV. o. t., t: Kobzos Ferenc). **8. Táska László** (Budapest, Apáczai Cs. J. Gimn., III. o. t., t: Zsigri Ferenc). **9. Pollner Péter** (Budapest, Piarista Gimn., IV. o. t., t: Gyimesi István). **10. Buday Gergely** (Gyöngyös, Berze Nagy J. Gimn., IV. o. t., t: Kiss Miklós).