Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1989. október 20-án rendezte 66. versenyét Budapesten és 12 vidéki városban. A versenyen az 1989-ben érettségizettek és középiskolai tanulók vehettek részt. A feladatok megoldására 5 óra állt rendelkezésre, bármilyen segédeszközt lehetett használni.

Összesen 273 versenyző adott be dolgozatot. A feladatok kitűzését és a beadott megoldások értékelését a Versenybizottság közösen végezte: vezetője *Radnai Gyula*, tagjai *Boros János, Gnädig Péter* és *Károlyházy Frigyes* voltak.

Ismertetjük a feladatokat és a verseny végeredményét.

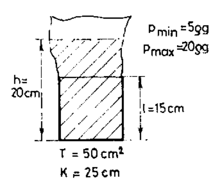
1. *Gergő gyakran segít a háztartásban. A zacskós tejet az 1. ábrán látható módon a zacskónál valamivel szűkebb keresztmetszetű, levágott tetejű és alul kilyukasztott műanyag flakonban szokták tárolni. Gergő megfigyelése szerint a szájával lefelé fordított flakonból a még felbontatlan zacskós tej magától kiesik, viszont a tetejénél megfogott tejes zacskóról még akkor sem esik le a flakon, ha alulról egy másik zacskó tejet akasztunk rá.*

1. ábra

Mi lehet a magyarázat?

Megoldás. A flakont a súrlódási erő tartja meg. A súrlódási erő a flakon falára ható nyomóerővel arányos, ez a nyomóerő pedig a tej hidrosztatikai nyomásából származik. A súrlódási erő nagyságát becsléssel állapítjuk meg. Azt kell megmutatnunk, hogy a flakonra ható súrlódási erő az 1. ábrán látható helyzetben 10 N-nál is nagyobb lehet, viszont a szájával lefelé fordított flakonban a tejeszacskóra 10 N-nál kisebb súrlódási erő hat.

Most egy becsléssel megmutatjuk, hogy ez teljesül. Az egyszerűség kedvéért mérjük a távolságot centiméterben (2. ábra).



2. ábra

A tejeszacskó kerülete valamivel több, mint 25 cm, ezért a flakonban a zacskó kissé meggyűrődik, így a tej egyenletesen nyomja a zacskót a flakon falához. A zacskóban a tej fölött levegő van, ennek nyomása megközelítőleg egyenlő a külső légnyomással. Esetleg még nagyobb is lehet, ha – miközben tartjuk – jól meg is szorítjuk a zacskót. Ezzel a nyomóerőt és így a súrlódási erőt is tovább növeljük. Most azonban ezt ne vegyük figyelembe; enélkül is meg kell, hogy tartsa a flakont (a ráakasztott másik zacskó tejjel együtt) a súrlódási erő.

Mivel a hidrosztatikai nyomás lefelé lineárisan nő, átlagos értéke a 2. ábra alapján:

$$\overline{p} = \frac{p_{\min} + p_{\max}}{2} = 1{,}25 \text{ kPa}.$$

A flakon falának területe:

$$K \cdot l = 375 \text{ cm}^2 = 3{,}75 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^2.$$

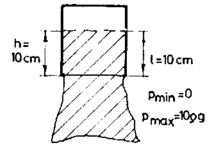
E kettő szorzatának μ_0-szorosa adja meg a súrlódási erő maximális értékét. (μ_0 a tapadási-súrlódási együttható, értéke legalább 0,3 és legfeljebb 0,6 a zacskó és a flakon fala között.) A legkisebb μ_0 értéket véve is

$$F_{\text{surl}} > 13 \text{ N},$$

tehát a súrlódási erő valóban meg tudja tartani a mintegy 10 N súlyú másik zacskó tejet.

A feladat megoldása akkor teljes, ha azt is megmutatjuk, hogy a lefelé fordított flakonból magától kiesik a tejeszacskó, még a lehető legnagyobb μ_0 esetén is.

Tegyük fel, hogy a lefelé fordítás után a zacskó még nem mozdult el, csak a tej ömlött át a zacskó alsó részébe (3. ábra).



3. ábra

A flakon falára ható hidrosztatikai nyomás átlagértéke most csak

$$\overline{p} = 0{,}5 \text{ kPa},$$

és ez a kisebb nyomás ráadásul kisebb területen is hat a flakon falára:

$$Kl = 250 \text{ cm}^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^2.$$

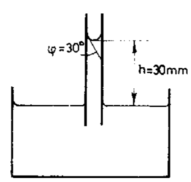
E két érték szorzatának μ_0-szorosa még $\mu_0 = 0{,}6$ esetén is csak 7,5 N, tehát

$$F_{\text{surl}} < 8 \text{ N}.$$

Ezért a tejeszacskó kiesik a lefelé fordított flakonból.

Megjegyzés. A megoldáshoz tartozik μ_0 értékének becslése is. A példaképpen bemutatott gondolatmenetben a $0{,}3 \leqq \mu_0 \leqq 0{,}6$ becslést alkalmaztunk, ez összhangban van a Középiskolai Fizikai Táblázatokban ill. középiskolai és egyetemi tankönyvekben közölt adatokkal. Ugyanakkor, ha a tejeszacskó kívül zsíros, μ_0 jóval kisebb is lehet, s a zsíros tejeszacskóról bizony lecsúszhat a flakon a ráakasztott másik liter tejjel együtt. Most azonban nem erről a tapasztalatról volt szó, nem ezt kellett megmagyarázni.

2. *Egy keskeny, hosszú csőben (kapillárisban)* 30 mm *magasra emelkedik a víz a csövön kívüli szinthez képest. A víz felszíne* 30°*-os szöget zár be a cső falával az érintkezési vonalnál. A csövet benyomjuk a vízbe (így az teljesen megtelik), majd a felső végén ujjunkkal befogva, függőleges helyzetben egészen kiemeljük a csövet a vízből. Ezután a befogott nyílást újra szabaddá tesszük, s ekkor a víz egy része kifolyik.*



4. ábra

Lehet-e a függőleges helyzetű csőben maradó vízoszlop hossza

a) 123 mm;
b) 62 mm;
c) 41 mm;
d) 20 mm?

Megoldás. Amikor a cső a vízbe nyúlik, (4. ábra) $2r\pi\alpha \cdot \cos\varphi$ nagyságú erő emeli h magasságra az $r^2\pi$ keresztmetszetű csőben a vizet:

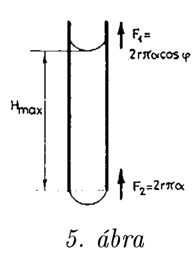
$$2r\pi\alpha \cdot \cos\varphi = r^2\pi h\varrho g. \tag{1}$$

Jelen esetben $h = 30$ mm, $\varphi = 30°$, és ha behelyettesítjük a víz sűrűségének és felületi feszültségének táblázati adatait, meghatározhatjuk a kapilláris sugarát:

$$r = 0{,}42 \text{ mm}.$$

A sugár kiszámítása nem volt feladat, ezt az adatot nem is fogjuk felhasználni a továbbiakban, viszont segít a kapilláris elképzelésében. Úgy képzeljük, hogy a cső fala elég vékony, még a kapilláris belső átmérőjéhez képest is elhanyagolható a fal vastagsága.

Ebben az esetben amikor kiemeljük a csövet a vízből, a cső *alján* akkor lép fel a *legnagyobb* felfelé mutató erő, ha pontosan félgömb alakú, jó közelítéssel r sugarú „csepp" alakul ott ki (5. ábra).



5. ábra

Most az egyensúly feltétele:

$$2r\pi\alpha\cos\varphi + 2r\pi\alpha = r^2\pi H_{\max}\varrho g. \tag{2}$$

Ha az (1) és (2) egyenleteket összevetjük, a csőben maradó vízoszlop maximális hosszára az alábbi egyszerű összefüggés adódik:

$$H_{\max} = h\frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi}.$$

Ebbe behelyettesítve a $h = 30$ mm és $\varphi = 30^\circ$ megadott értékeket:

$$H_{\max} = 64{,}6 \text{ mm}.$$

Máris kizárhatjuk az *a)* esetet: a csőben maradó vízoszlop hossza nem lehet 123 mm.

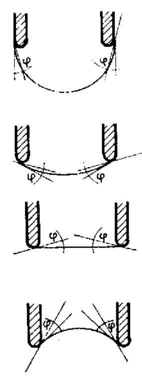
$H_{\max} = 64{,}6$ mm-nél *rövidebb azonban lehet* a vízoszlop hossza, mivel az alsó felület még lehet r-nél nagyobb sugarú gömbsüveg, lehet akár vízszintes felület, sőt, lehet olyan is, amely fölfelé domborodik, alulról homorú! Így a csőben maradó vízoszlop akármilyen rövid lehet, tehát 0 és 64,6 mm között minden hossz lehetséges:

$$0 \leqq H \leqq H_{\max}.$$

Ezért a b), c) és d) esetben kérdezett hosszak bármelyike megvalósulhat.

A helyes válasz tehát:

a) nem lehetséges; b), c), d) lehetséges.



6. ábra

Megjegyzés: Érdemes külön is megvizsgálni, hogyan alakulhatnak ki az említett felületek a cső alján annak ellenére, hogy az illeszkedési szög mindig $\varphi(= 30^\circ)$ kell, hogy maradjon! Néhány ilyen esetet rajzoltunk meg a 6. ábrán. Ha nem ilyen vékony a cső fala, hanem – mint az üvegkapillárisok esetén gyakran előfordul – vastagabb, akkor az alul kialakuló csepp alakja elég bonyolult is lehet. Több versenyző szép kvalitatív diszkussziót adott ezekre az esetekre is.

3. *Az iskolai* 12 V-os, 50 Hz-*es váltóáramú áramforrásra sorba kapcsoltunk egy* 24 V, 10 W-*os izzót és egy* 101,3 μF *kapacitású kondenzátort. Az izzó alig világít. Rendelkezésünkre áll még egy* 0,1 H *induktivitású tekercs is. Hogyan lehetne a kapcsolást úgy átalakítani, hogy az izzó szép fényesen világítson? (A tekercs ohmos ellenállása elhanyagolható. Csak a kapcsolást szabad átalakítani, az alkatrészeket nem.)*

Megoldás. A 24 V, 10 W-os izzó ellenállása:

$$R = \frac{(24 \text{ V})^2}{10 \text{ W}} = 57{,}6\ \Omega.$$

A 101,3 μF-os kondenzátor váltóáramú ellenállása:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \text{ s}^{-1} \cdot 101{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 31{,}4\ \Omega.$$

A 0,1 H induktivitású tekercsre:

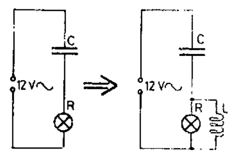
$$X_{\mathrm{L}} = \omega L = 314 \text{ s}^{-1} \cdot 0{,}1 \text{ H} = 31{,}4\ \Omega.$$

Mivel e két váltóáramú ellenállás egyenlő, az embernek azonnal a rezonancia jut az eszébe. Kapcsoljuk sorba mindhárom elemet! Ekkor az eredő impedancia az ohmos ellenállással egyenlő, s erre jut a generátor teljes feszültsége – mégsem ez a legjobb megoldás. Igaz, eredetileg a kondenzátorra és az ellenállásra együtt jutott 12 V, most pedig magára az ellenállásra egyedül, de hát hol van ez még attól a 24 V-tól, ami az izzó üzemi feszültsége? Jobban világít az izzó, de ez még nem az igazi.

Ha mindhárom elemet párhuzamosan kapcsoljuk, akkor is csak 12 V juthat az izzóra.

Térjünk vissza az eredeti ötlethez, a soros rezonancia esetéhez! A sorbakapcsolt tekercsen és kondenzátoron külön-külön sokkal nagyobb lehet a feszültség, mint a generátor feszültsége. Nem lehetne ezt kihasználni?

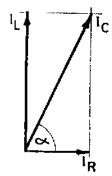
Kössük sorosan a tekercset és a kondenzátort a generátorra, és kapcsoljuk az izzót valamelyik elemmel párhuzamosan! Mivel eredetileg a kondenzátor és az izzó voltak sorba kapcsolva, a legegyszerűbb az lesz, ha a már összeállított kapcsolásban az izzóra párhuzamosan rákötjük a tekercset (7. ábra).



7. ábra

Hogyan határozhatjuk meg most az izzóra jutó feszültséget?

Az izzóra és a tekercsre ugyanaz a feszültség jut. A tekercsen átfolyó áram negyed periódust (90°-ot) késik ehhez a feszültséghez képest, az izzón átfolyó áram pedig ugyanabban a fázisban van, mint a rá jutó feszültség. Ez azt jelenti, hogy a tekercsen és az izzó ellenállásán átfolyó áram között van 90° fáziskülönbség. A szokásos vektoros ábrázolással még a kondenzátoron átfolyó áramot is megkaphatjuk, mint a kettő vektori összegét (8. ábra).

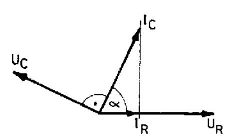


8. ábra

Az ábra alapján tg α értéke:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{I_\text{L}}{I_\text{R}} = \frac{R}{\omega L} = R\omega C.$$

Az áramok vektorábráját felhasználva szerkeszthetjük meg a feszültségek vektorábráját. Az ellenálláson a feszültség ugyanolyan fázisú, mint a rajta folyó áram, tehát I_R és U_R vektora ugyanolyan irányú. A kondenzátoron a feszültség 90°-kal van elmaradva a kondenzátoron folyó áramhoz képest, ahogy azt a 9. ábra mutatja.

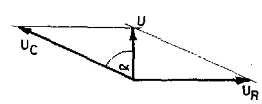


9. ábra

U_c értéke az ábra alapján:

$$U_c = I_c \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{I_\text{R}}{\cos\alpha} \cdot \frac{R}{\text{tg}\ \alpha} = \frac{U_\text{R}}{\sin\alpha}.$$

Ezt az összefüggést felhasználva szerkeszthetjük meg a generátor feszültségének vektorát is (10. ábra).



10. ábra

A 10. ábráról már leolvasható az izzóra jutó U_R és a generátor U feszültsége közti összefüggés:

$$U_\text{R} = U \cdot \text{tg}\ \alpha = U\frac{R}{\omega L} = 12\ \text{V}\ \frac{57{,}6\ \Omega}{31{,}4\ \Omega} = 22{,}0\ \text{V}.$$

Ekkor már mondhatjuk, hogy a 24 V-os izzó fényesen világít.

Ugyanilyen jó megoldás az is, ha az izzót a kondenzátorral kötjük párhuzamosan, és velük sorba a tekercset.

Az összes többi esetben az izzóra ennél kisebb feszültség jut.

Megjegyzés. Akik ismerik e vektoros számítás mélyebb hátterét, az ún. komplex formalizmust, azok algebrai úton is kiszámíthatják mindazt, amit a fenti geometriai megoldásból kaptunk. A komplex formalizmusban az áramokat és a feszültségeket olyan komplex számokkal jellemezzük, melyek abszolút értéke adja az áramok és feszültségek csúcsértékét, a valós tengellyel bezárt szög pedig a fázisszöget. A komplex impedanciák:

$$\widetilde{X}_{\mathrm{L}} = j\omega L, \quad \widetilde{X}_c = \frac{1}{j\omega C}, \quad \widetilde{R} = R,$$

ahol $j = \sqrt{-1}$ komplex egységgyök.

Érdeklődők számára az alapfokú egyetemi és főiskolai elektromosságtani tankönyvek és jegyzetek tanulmányozását javasoljuk.

Hangsúlyozzuk azonban, hogy a feladatot meg lehetett oldani a komplex formalizmus ismerete nélkül is.

Gnödig Péter és Radnai Gyula ismerteti a 3. feladat megoldását

A verseny eredménye

I. díjat kaptak egyenlő helyezésben:

Antal Csaba, a Budapesti Műszaki Egyetem I. éves villamos mérnök hallgatója, aki a budapesti Apáczai Csere János Gimnáziumban érettségizett, mint Flórik György tanítványa, és *Rékasi János*, a gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium IV. osztályos tanulója, Kiss Lajos tanítványa.

II. díjat kaptak egyenlő helyezésben:

Laux Ádám, a budapesti Táncsics Mihály Gimnázium IV. osztályos tanulója, tanárai Holicsné Csejk Gabriella és Szabó László; *Somfai Ellák*, az Eötvös Loránd Tudományegyetem I. éves fizikus hallgatója, aki Pápán, a Petőfi Sándor Gimnáziumban érettségizett, mint Dankó Ferenc tanítványa, és *Szabó Szilárd*, az Eötvös Loránd Tudományegyetem I. éves fizikus hallgatója, aki Budapesten, az Apáczai Csere János Gimnáziumban érettségizett, mint Holics László tanítványa.

III. díjat kaptak egyenlő helyezésben:

Boncz András, a zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium III. osztályos tanulója, Pálovics Róbert tanítványa; *Késmárki Szabolcs*, a budapesti Műszaki Egyetem I. éves villamosmérnök hallgatója, aki Kecskeméten, a Bányai Júlia Gimnáziumban érettségizett, mint Borsos Ferenc tanítványa, és *Kovács Attila*, a debreceni Mechwart András Gépipari Szakközépiskola IV. osztályos tanulója, Kopcsa József tanítványa.

Dicséretet kaptak egyenlő helyezésben:

Fülöp Gábor, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium IV. osztályos tanulója, Horváth Gábor tanítványa és *Horváth Tibor*, a kecskeméti Katona József Gimnázium IV. osztályos tanulója, Kocsisné Domján Erzsébet tanítványa.

Az eredményhirdetésre 1989. november 24-én került sor az ELTE Múzeum körúti fizikai előadótermében. A nyertes versenyzőkön és tanáraikon kívül részt vettek az ünnepélyes díjkiosztáson a KöMaL 1988–89. évi fizika pontversenyének legjobbjai is, akik szintén átvehették díjukat.

Az Eötvös verseny eredményhirdetését a Bolyai Farkas fizikaverseny eredményhirdetése követte. Az Eötvös verseny díjait Kroó Norbert akadémikus, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke, a Bolyai Farkas fizikaverseny díjait Gündischné Gajzágó Mária középiskolai tanárnő, Bolyai Farkas fizikai munkásságának kutatója adta át.

Valamennyi nyertes és helyezett versenyzőnek, valamint az őket felkészítő tanároknak ezúton is gratulálunk.