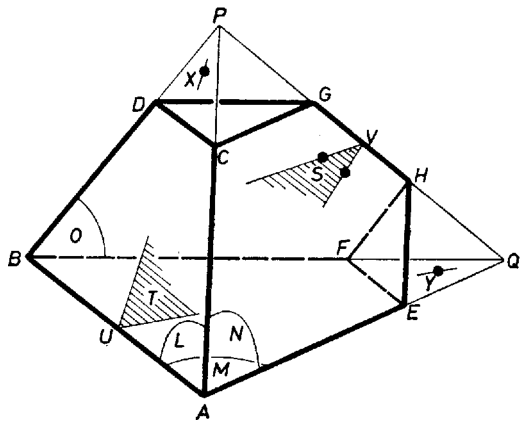
Jelöljük a vizsgált testet K-val, a feladatban utoljára említett két csúcsát A-val, B-vel. Mivel 3 egységnyi él csak ezekből indul, a belőlük induló 3 egységnyi él az őket összekötő AB szakasz. Ez az él a K-t önmagába vivő tetszőleges tükrözéssel önmagába megy át, hiszen K-nak nincs más, vele egyenlő hosszú éle.



Jelöljük az AB élt alkotó lapokat L-lel, M-mel. Ezek a K-t önmagába vivő tükrözéskor vagy önmagukba vagy egymásba mennek át. Ha egy tükrözés K-t önmagába viszi, és az L, M lapokat felcseréli, akkor a tükrözés síkja átmegy AB-n, elválasztja egymástól az L, M lapokat és felezi a lapok síkja által alkotott szöget. Ez a sík tehát egyértelműen meghatározott, jelöljük S-sel. – Ha pedig egy tükrözés K-t, L-et, M-et önmagába viszi, akkor síkja csak AB felező merőlegese lehet, jelöljük ezt T-vel. K-t tehát csak az S-re, T-re vonatkozó tükrözések vihetik önmagába, és mivel K-nak két szimmetriasíkja van, ezek a tükrözések önmagába is viszik át a K-t.

Az A-ból, B-ből induló, AB-től különböző élek hossza 2 egység. Mivel A-n és B-n kívül nincs K-nak olyan csúcsa, melyből két db 2 egységnyi él indulna, azért ezeknek az éleknek a másik végpontjuk nem lehet azonos. Jelöljük L-nek A-val, B-vel szomszédos csúcsait C-vel, D-vel, ezek S-re vonatkozó tükörképét E-vel, F-fel. Ekkor $AC = AE = BD = BE = 2$.

Mivel a T-re vonatkozó tükrözés C-t és D-t felcseréli, azért $CD \perp T$, azaz $CD||AB$, vagyis az $ABCD$ idom szimmetrikus trapéz, $ABFE$ is az, $CDFE$ pedig téglalap. Mivel A-hoz, B-hez más él nem csatlakozik, K-nak az ACE, BDF síkokban is van egy-egy lapja, jelöljük ezeket N-nel, O-val. Az előírás szerint K-nak 8 csúcsa van, közülük már említettünk 6-ot, ezeken kívül még 2 csúcs van. Be fogjuk látni, hogy ezek N-nek is, O-nak is csúcsai.

Először megmutatjuk, hogy L azonos az $ABCD$ trapézzal. Ha ugyanis L-nek volna még egy X csúcsa, akkor L konvexitása miatt az csak CD-nek AB-t nem tartalmazó oldalán lehetne. Így X-nek S-re vonatkozó Y tükörképe – az M lapban – különbözne X-től: ez volna K nyolcadik csúcsa. K konvexitása miatt XY éle volna K-nak, és mivel más csúcsa már nincs K-nak, azért CE és DF is él volna. Ámde ekkor $XY = CE = DF = 1$ volna, hiszen K még nem említett élei mind 1 egységnyiek. Emiatt a CDX, EFY síkok párhuzamosak volnának, ami nem lehet, hiszen ezek az egymáshoz AB-ben csatlakozó L, M lapok síkjai. Ezzel beláttuk, hogy L azonos az $ABDC$ trapézzal, tehát CD éle a K-nak: $CD = 1$.

Így az AC, BD egyenesek CD-nek AB-vel ellentétes oldalán metszik egymást, jelöljük a metszéspontjukat P-vel, P-nek S-re vonatkozó tükörképét Q-val. A PCD, PAB háromszögek hasonlóak, hasonlósági arányuk: 1:3, tehát $AC = 2$ miatt $PC = PD = 1$, vagyis a PCD, PAB háromszögek szabályosak, és szabályosak a QEF, QAB háromszögek is.

Jelöljük az AB, PQ szakaszok felezőpontját U-val, V-vel. Az S-re, T-re vonatkozó tükrözést egymás után végrehajtva az UV egyenesre való tükrözést (vagyis az egyenes körüli $180°$-os forgatást) kapjuk, feltevésünk szerint K-t ez a transzformáció is önmagába viszi. Mivel az eddig említett 6 csúcs halmaza S-re is, T-re is szimmetrikus, ilyennek kell lennie a még meg nem nevezett 2 csúcs halmazának is. A 2 csúcs által meghatározott szakasz tehát S-re is, T-re is, így az UV egyenesre nézve is szimmetrikus. K konvexitása miatt ez a szakasz nem lehet az UV egyenesen, tehát a hiányzó pontok egyike sem lehet az UV egyenesen.

Az S-re vonatkozó tükrözés AC-t AE-be viszi, tehát ez a tükrözés N-et önmagába viszi. N nem lehet azonos az ACE háromszöggel, hiszen ekkor K-nak csak az A, B, C, D, E, F pontok lehetnének a csúcsai. Jelöljük N-nek C-vel szomszédos (A-tól különböző) csúcsát G-vel, a K nyolcadik csúcsát H-val. Ha G az S-en van, akkor különböznie kell V-től, mert csak így nincs rajta a T-n is. Ekkor H a G-nek T-re vonatkozó tükörképe. Ámde ezek a pontok csak a $CDFE$ téglalap AB-vel ellentétes oldalán lehetnének, így $CD = 1$ miatt $GH < 1$ volna, ami nem lehet.

G tehát nem lehet rajta S-en, így S-re vonatkozó H tükörképe is csúcsa N-nek. Mivel K-nak további csúcsa nincs, a G, H pontok rajta vannak T-n, és így a PQ szakaszon is. Ekkor $CG = CP = 1$, $AP = AQ = 3$ miatt a CPG háromszög hasonló az APQ háromszöghöz, és $PG = \frac{1}{3}PQ$. Ugyanennyi a HQ szakasz is, tehát GH is harmada PQ-nak. Mivel GH éle K-nak, $GH = 1$, vagyis $PQ = 3$, az $ABPQ$ tetraéder szabályos.

Könnyen látható, hogy az így egyértelműen kapott testnek megvannak a kívánt tulajdonságai. Térfogata az $ABPQ$

tetraéder térfogatának $\left(1-\dfrac{2}{27}\right)$-szerese, tehát

$$V_K=\left(1-\frac{2}{27}\right)\frac{9\sqrt{2}}{4}=2{,}946 \text{ térfogategység.}$$

Felszíne pedig az egységnyi oldalú szabályos háromszög területének $2\{1+(3^2-1)+(3^2-2)\}=32$-szerese, azaz $F_K=8\sqrt{3}=13{,}86$ területegység.

Kiss Katalin (Budapest, Dózsa Gy. Gimn., III. o. t.)