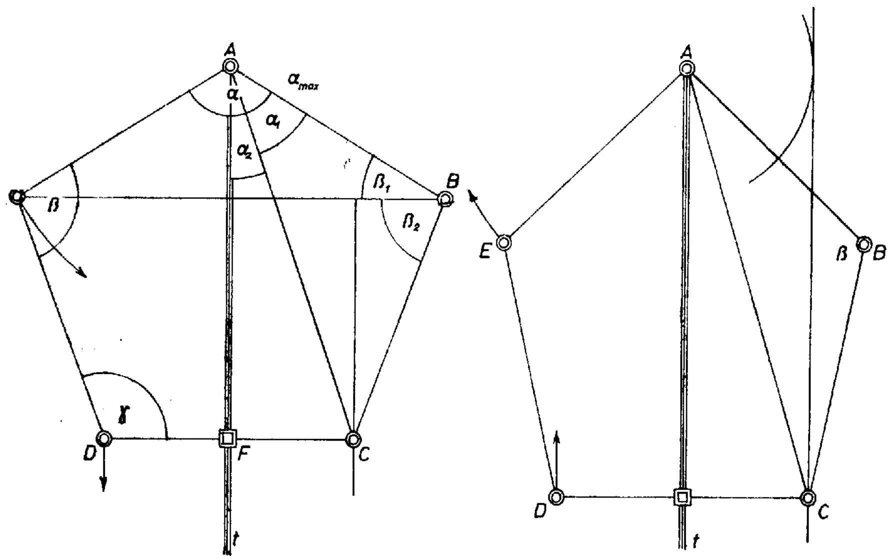
Legyen egy, a föltevés szerinti ötszög $ABCDE$. A t szimmetriatengely átmegy az egyik csúcson, ugyanis a tükrözés vagy párokba kapcsolja a csúcsokat vagy – ha egy csúcs rajta van a t-n – ezt önmagába viszi át. Az ötszög egyik csúcsa az utóbbi típusú, mert az 5 páratlan szám.

Válasszuk úgy a betűzést, hogy t az A-n menjen át, így t merőlegesen felezi a CD oldalt és a BE átlót, elég tehát a C-nél levő γ, a B-nél levő β, valamint az A-nál levő α szög korlátait vizsgálnunk.

A Gy. 1526 (H) gyakorlatban[1] bebizonyítottuk, hogy a szóban forgó ötszögek mindegyik szöge tompaszög – tekintet nélkül arra, hogy van-e tengelyük – tehát a 90° mindenesetre el nem érhető alsó korlátja mind a három szögnek. Eszerint a $BCDE$ szimmetrikus trapézban $BE > CD$.

Könnyű látni, hogy t és rajta A helyzetét, valamint AB-t és α-t megválasztva, megszerkeszthető B, majd a t-től $AB/2$ távolságban haladó egyenesen C, vagyis az ötszöget (β-t és γ-t) lényegében egyedül α meghatározza. Hasonlóan t, az erre tükrös C, D pontpár és $\gamma(> 90^\circ)$ megválasztásával kijelölhető B, majd A. Végül β megválasztása is meghatározza α-t és γ-t: a BAC háromszög fölvétele után C-ből érintőt szerkesztünk az A körül $AB/2$ sugárral rajzolt körhöz (úgy, hogy B-t válassza el a körtől), ez adja t irányát.

Vezessük be még az $ABE\sphericalangle = \beta_1$, $EBC\sphericalangle = \beta_2$, $BAC\sphericalangle = \alpha_1$ és $CAF\sphericalangle = \alpha_2$ jelöléseket, ahol F a CD olda1 t-n levő pontja.



A konvexség miatt $\beta = \beta_1 + \beta_2$ és $\alpha = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Ekkor fennállnak a következő összefüggések:

$$\beta_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\beta_2 = \frac{BE - CD}{2\cdot BC} = \frac{2\cdot BA\sin\dfrac{\alpha}{2} - BA}{2\cdot BA} = \sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2},$$
$$\cos\gamma = \cos(180^\circ - \beta_2) = \frac{1}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Az α szög felveheti megengedett legnagyobb értékét, a 120°-ot, mert ekkor $\beta_1 = 30^\circ$, $\beta_2 = 68^\circ 32'$, $\beta = 98^\circ 32'$ és $\gamma = 111^\circ 28'$, megengedett értékek.

Csökkentve ebben az értékrendszerben α-t, vele β_1 szigorúan monoton növekszik és β_2 is – hiszen $\cos\beta_2$ szigorúan monoton csökken –, másrészt γ szigorúan monoton csökken, mert $\cos\gamma$ szigorúan monoton növekszik; eszerint

$$\alpha_{\max} = 120^\circ, \quad \beta_{\min} = 98^\circ 32' \quad \text{(fölkerekítve)},$$
$$\gamma_{\max} = 111^\circ 28' \quad \text{(lekerekítve)}.$$
$$(\cos\beta_{\min} = (3 - \sqrt{3} - \sqrt[4]{12})4).$$

Legfeljebb addig csökkenhet α, amíg β a látott növekedésben eléri a 120°-ot – ha egyáltalán eléri. Elérhető a $\beta = 120^\circ$ érték, mert akkor $\alpha_1 = 30^\circ$, $AC = \sqrt{3}AB$, és $\sin\alpha_2 = \dfrac{CD}{2\cdot AC} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ alapján $\alpha_2 = 16^\circ 47'$, ezekből $\alpha = 93^\circ 34'$, másrészt $\gamma = 103^\circ 13'$, megengedett értékek. Ezek szerint

$$\beta_{\max} = 120^\circ \quad \text{és} \quad \alpha_{\min} = 93^\circ 34',$$

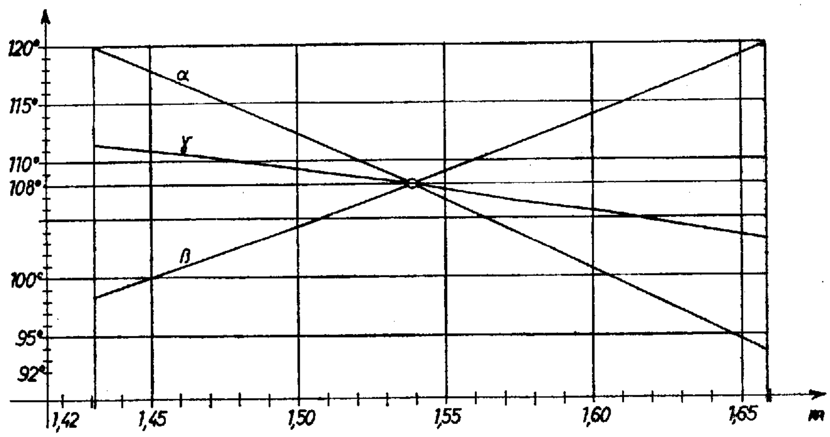
[1] Megoldását lásd K.M.L. 49 (1974) 145.

hiszen a föntebbieket megfordítva, α ezt az értéket α_1 és α_2 szigorúan monoton csökkenésével érte el (ami a β alapján végzett szerkesztésből is kiolvasható); továbbá a talált γ érték megadja a $\gamma_{\min}$ értéket, hiszen α és γ – mint láttuk egyirányúan változnak: $\gamma_{\min} = 103°13'$.

Mindezek szerint válaszunk:

$$93°34' \leq \alpha \leq 120°, \quad 120° \geq \beta \geq 98°32', \quad 103°13' \leq \gamma \leq 111°28'.$$

Ábráink mechanikus modellt vázolnak az ötszögről a két szélső helyzetben : az A, ..., E csúcsokban csuklók kapcsolják össze az egyenlő oldalakat, a tengelyt realizáló sínen A rögzítve van, F pedig csúszik, CD-t állandóan merőleges állásban tartja.



Grafikonunk a szögek változását ábrázolja az $AF = m$ magasság függvényében; látjuk, hogy α, β és γ egyszerre válik egyenlővé a szabályos ötszög esetében.