1. a) Azonosságok alkalmazásával

$$\frac{1}{\log_{30} 3} = \log_3 30 = 1 + \log_3 10, \quad \frac{1}{\lg 3} = \log_3 10 \quad \text{és} \quad \log_3 270 = 1 + \log_3 90,$$

azaz az adott kifejezés

$$(\log_3 90)(1 + \log_3 10) - (\log_3 10)(1 + \log_3 90) = \log_3 9 = 2.$$

b) Azonosságok alkalmazásával

$$\frac{1 - \mathrm{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{2\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}} = 1$$

és

$$2\sin^2 \frac{5\pi}{12} - 1 = -\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A kifejezés pontos értéke $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Legyen a sorozat második eleme a, a hányadosa q. Ekkor a $a_6 = aq^4$, $a_3 = aq$ és $a_5 = aq^3$. A feltételek szerint

$$a^2q^4 = 24^2 \quad \text{és} \quad aq^3 - aq = 36.$$

Innen $aq^2 = 24$ vagy $aq^2 = -24$ és

$$aq^2\left(q - \frac{1}{q}\right) = 36 \quad (q \neq 0).$$

A feltételeknek négy sorozat felel meg.
Ha $q = 2$, akkor $a = 6$, a sorozat: 3, 6, 12, 24, 48, 96,
ha $q = -\frac{1}{2}$, akkor $a = 96$, a sorozat:-192, 96, -48, 24, -12, 6,
ha $q = -2$, akkor $a = -6$, a sorozat: 3, -6, 12, -24, 48, -96,
ha $q = \frac{1}{2}$, akkor $a = -96$, a sorozat: -192, -96, -48, -24, -12, -6.

3. A $P(2;2)$ ponton áthaladó egyenesek egyenlete $x = 2$ vagy $y - 2 = m(x - 2)$. Az $x = 2$ egyenletű egyenes a körnek érintője.
Az $y - 2 = m(x - 2)$ egyenletű egyenes pontosan akkor érinti a kört, ha az

$$x^2 + \big(2 + m(x - 2)\big)^2 - 2x = 0$$

egyenlet diszkriminánsa 0, azaz ha $4(4m - 3) = 0$, $m = \frac{3}{4}$. A másik érintő egyenlete tehát $y - 2 = \frac{3}{4}(x - 2)$.

4. Jelölje A_1, B_1, illetve C_1 az ABC háromszög BC,AC, illetve AB oldalának a felezőpontját, S pedig a háromszög súlypontját. Az ASB háromszög területe az ABC háromszög területének a harmada.

Legyen $AA_1 = 12$ és $BB_1 = 5$ egység.
Jelölje φ az ASB szöget. Ekkor

$$\frac{40}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot \sin\varphi.$$

amiből $\sin\varphi = 1, \varphi = 90°$, tehát az ASB háromszög derékszögű.

Így

$$AB^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot 5\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 12\right)^2, \; AB = \frac{2}{3} \cdot 13.$$

Mivel $C_1S = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{13}{3}$, ezért a harmadik súlyvonal hossza

$$CC_1 = 3 \cdot C_1S = 13 \text{ egység}.$$

5. Mivel $2 = \frac{a + c}{b} = \frac{\sin\alpha + \sin\gamma}{\sin\beta}$, ezért azonosságok alkalmazásával

$$\frac{2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{1}{2},$$

amiből, figyelembe véve, hogy

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\alpha-\gamma}{2} = -45^\circ,$$

tehát

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\beta}{2} \quad \text{és} \quad \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

adódik, hogy

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Innen

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{7}{8}}, \quad \text{így} \quad \sin\beta = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

6. Mivel AA' átmérő, ezért a Thalész-tétel miatt $A'C$ merőleges AC-re és $A'B$ merőleges AB-re. Jelölje M az A'-nek A_1-re vonatkozó tükörképét. Az $A'CMB$ négyszög paralelogramma, hiszen középpontosan szimmetrikus.

Ezért BM párhuzamos $A'C$-vel, azaz merőleges AC-re, tehát BM a háromszög egyik magasságvonala. Hasonlóan adódik, hogy CM a háromszög másik magasságvonala. A BM és CM magasságvonalak M metszéspontja tehát valóban a háromszög magasságpontja.

7. A gyökjel alatti kifejezést azonosan átalakítjuk.

$$4 - 2^{x+3} + 2^{2(x+1)} = (2 - 2^{x+1})^2.$$

Az egyenlet mindkét oldalát kettővel szorozva

$$2^{2(x+1)} - 3\cdot 2^{x+1} = 2\ |2^{x+1} - 2|.$$

Ha $2^{x+1} \geqq 2$, akkor

$$2^{2(x+1)} - 5\cdot 2^{x+1} + 4 = 0, \quad \text{azaz} \quad 2^{x+1} = 4 \quad \text{vagy} \quad 2^{x+1} = 1.$$

Innen $2^{x+1} = 4(\geq 2),\ x = 1.$

Ha $2^{x+1} < 2$, akkor

$$2^{2(x+1)} - 2^{x+1} - 4 = 0,$$

azaz

$$2^{x+1} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{17}) > 2$$

vagy

$$2^{x+1} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{17}) < 0,$$

tehát ilyen megoldás nincs.

Az egyenlet egyetlen megoldása $x = 1$.

8. Az egyenletnek akkor van megoldása, ha

$$2m\cdot\cos 2x - 4(m-1)\cos x + 3m - 2 = 0 \ \text{ és } \ 1 - 2\cos x \neq 0.$$

Azonos átalakításokkal

$$m\cdot\cos^2 x - (m-1)\cos x + \frac{1}{4}(m-2) = 0.$$

Ha $m = 0$, akkor $\cos x = \dfrac{1}{2}$, ekkor az adott egyenletnek nincs megoldása.

Ha $m \neq 0$, akkor $x = \dfrac{1}{2}$ (ekkor nincs megoldás) vagy $\cos x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{m}$.

Az adott egyenletnek akkor van megoldása, ha

$$-1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \leq 1,$$

azaz, ha $m \geq \dfrac{2}{3}$ vagy $m \leq -2$.