1. Mivel a trapéz érintőnégyszög, ezért a párhuzamos oldalak összege 8 egység, a középvonal hossza 4 egység. Legyen az egyik párhuzamos oldal hossza $4-x$, akkor a másik párhuzamos oldal $4+x$ egység. Jelölje a trapéz magasságát $2m$. A feltétel szerint

$$\frac{(8-x)m}{(8+x)m}=\frac{5}{11}, \quad \text{ahonnan} \quad x=3.$$

A trapéz párhuzamos oldalainak hossza 1, illetve 7 egység.

2. a) Az $x>4$ feltétellel az egyenlet ekvivalens az $(x-2)(x-4)=1$ egyenlettel. Az $x_1=3+\sqrt{2}$ az egyenlet egyetlen megoldása.

b) Az $x>2$, $x\neq 4$ feltételekkel az egyenlet ekvivalens az $(x-2)^2(x-4)^2=1$ egyenlettel. Az egyenlet megoldásai

$$x_1=3+\sqrt{2} \quad \text{és} \quad x_3=3.$$

c) Az $x\neq 2$ és $x\neq 4$ feltételekkel az egyenlet ekvivalens az$(x-2)^2(x-4)^2=1$ egyenlettel. Az egyenlet megoldásai $x_1=3+\sqrt{2}$, $x_2=3-\sqrt{2}$ és $x_3=3$.

3. A keresett kör középpontja rajta van az A ponton átmenő, az adott érintőre merőleges egyenesen, amelynek egyenlete $x-y=1$, és az $x^2+y^2=1$ egyenletű körön. A feltételeknek két kör felel meg, ezek középpontjai: $C_1(1;0)$, illetve $C_2(0;-1)$.

A keresett körök sugarának négyzete

$$r_1^2=AC_1^2=8, \quad \text{illetve} \quad r_2^2=AC_2^2=18.$$

A körök egyenlete:

$$(x-1)^2+y^2=8, \quad \text{illetve} \quad x^2+(y+1)^2=18.$$

4. Ha az egyenletnek van valós gyöke, akkor az x_1, x_2 gyökökre

$$x_1+x_2=2-m \quad \text{és} \quad x_1x_2=m+5.$$

Mivel

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

ezért

$$10=(2-m)^2-2(m+5), \quad m=-2 \quad \text{vagy} \quad m=8.$$

Az $m=-2$ megfelel a feltételnek, $m=8$ nem, hiszen ekkor az egyenletnek nincs valós megoldása.

5. Legyen a mértani sorozat negyedik eleme a, hányadosa q. A feltételből következik, hogy $q\neq 0$. A feltétel szerint

$$\frac{a}{q}\cdot aq=9, \quad \text{és} \quad \frac{a}{q^2}+aq^2=-\frac{51}{4}.$$

Az első egyenletből $a=3$ vagy $a=-3$. Ha $a=3$, akkor a második egyenletnek nincs valós megoldása, ha $a=-3$, akkor $q^2=4$ vagy $q^2=\dfrac{1}{4}$. A feltételeknek négy sorozat felel meg.

$$a_1=-\frac{3}{8}, \quad q=2 \quad \text{vagy} \quad a_1=\frac{3}{8}, \quad q=-2$$

Vagy

$$a_1=-24, \quad q=\frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad a_1=24, \quad q=-\frac{1}{2}.$$

6. Legyen a B, illetve C pont vetülete az AD egyenesen B_1, illetve C_1. Az ABB_1 derékszögű háromszögben $AB_1=\sqrt{3}$, $BB_1=3$. A trapéz magassága $m=BB_1=CC_1=3$.

Jelölje x a CC_1 *előjeles* szakasz hosszát. A CC_1D derékszögű háromszögből $10=9+x^2$, ahonnan $x=1$ vagy $x=-1$. A feltételnek tehát két trapéz felel meg, így $AD=5+\sqrt{3}$ vagy $AD=3+\sqrt{3}$. A trapézok területe tehát

$$t_1=\frac{9+\sqrt{3}}{2}\cdot 3 \quad \text{vagy} \quad t_2=\frac{7+\sqrt{3}}{2}\cdot 3$$

területegység.

7. Legyen a kiegészítő gúla magassága n, a csonkagúla magassága $2m$, a kimetszett síkidom területe τ. Ismeretes, hogy ha a gúlát az alaplappal párhuzamos síkokkal metszük, akkor a kimetszett síkidomok területének aránya megegyezik a csúcstól mért távolságuk négyzetének arányával.

Ennek alkalmazásával

$$\frac{\tau}{t}=\left(\frac{n+m}{n}\right)^2 \quad \text{és} \quad \frac{T}{t}=\left(\frac{n+2m}{n}\right)^2,$$

azaz

$$\sqrt{\frac{\tau}{t}} = 1 + \frac{m}{n} \quad \text{és} \quad \sqrt{\frac{T}{t}} = 1 + 2 \cdot \frac{m}{n},$$

ahonnan

$$\sqrt{\frac{T}{t}} = 2\sqrt{\frac{\tau}{t}} - 1,$$

azaz

$$\tau = \frac{1}{4}(\sqrt{t} + \sqrt{T})^2.$$

8. Emeljük négyzetre az egyenletek mindkét oldalát, majd adjuk össze az így kapott egyenleteket:

$$1 = 2\cos^2 x + \frac{2}{3}\sin^2 x,$$

amiből $4\cos^2 x = 1$, azaz $\cos x = \frac{1}{2}$ vagy $\cos x = -\frac{1}{2}$. Az egyenletrendszer megoldásai:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi, & y_1 &= \frac{\pi}{4} + 2n\pi,\\
x_2 &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, & y_2 &= \frac{7\pi}{4} + 2n\pi,\\
x_3 &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & y_3 &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\\
x_4 &= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, & y_4 &= \frac{5\pi}{4} + 2n\pi,
\end{aligned}$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{Z}$.