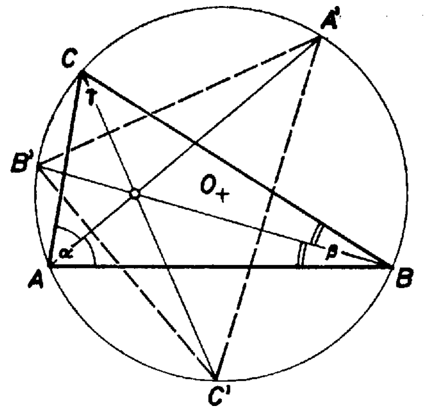
1. *Az ABC háromszög területe t, köré írt körének sugara R, a belső szögfelezők a kört rendre az A', B', C' pontokban metszik. Az $A'B'C'$ háromszög területe T. Bizonyítsuk be, hogy $16T^3 \geq 27R^4t$.* (A XXX. Nemzetközi Diákolimpiára javasolt feladat, Csehszlovákia.)



Az ábrán látható jelöléseket használva belátható, hogy $A'C'C\sphericalangle = A'AC\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$, illetve $B'C'C\sphericalangle = B'BC\sphericalangle = \dfrac{\beta}{2}$, mivel ugyanahhoz a húrhoz tartozó kerületi szögekről van szó, és AA', ill. BB' szögfelezők.

Így $A'C'B'\sphericalangle = A'C'C\sphericalangle + B'C'C\sphericalangle = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Hasonló módon $C'B'A'\sphericalangle = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ és $B'A'C' = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

Ennek alapján – felhasználva a háromszög területére vonatkozó ismert összefüggést –

$$T = \frac{R^2}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\gamma) + \sin(\beta+\gamma)\big).$$

Az ABC háromszög területét $t = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ alakban felírva a bizonyítandó egyenlőtlenség egy trigonometrikus egyenlőtlenséggé alakítható:

$$16\left[\frac{R^2}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\beta+\gamma)\big)\right]^3 \geq 27R^4 2R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Megfelelő egyszerűsítések, ill. átrendezés után, és felhasználva a $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$, $\sin(\alpha+\gamma) = \sin\beta$ és $\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha$ összefüggéseket, kapjuk a

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

egyenlőtlenséget. Erről könnyen látható, hogy igaz, mivel $\sin\alpha$, $\sin\beta$ és $\sin\gamma$ pozitív számok (egy háromszög szögeinek szinuszai), így igaz rájuk a számtani és mértani közép közötti összefüggés.

A megoldásból következik, hogy egyenlőség akkor áll fenn, ha $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$, azaz a háromszög szabályos.

(*Nagypál Éva* Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha $a < b$, akkor $a^3 - 3a \leq b^3 - 3b + 4$* ($a, b$ valós). *Teljesülhet-e az egyenlőség?* (A XXX. Nemzetközi Diákolimpiára javasolt feladat, Svédország.)

I. megoldás. Bevezetve az $f(x) = x^3 - 3x$ jelölést, a bizonyítandó állítás (mivel $a < b$): $f(a) \leq f(b) + 4$. Vizsgáljuk az $f(x)$ függvényt!

Ennek a függvénynek a differenciálhányadosa egy tetszőleges x pontban, $x_n \to x$ ($x_n \neq x$):

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = \frac{x^3 - 3x - x_n^3 + 3x_n}{x - x_n} \to 3(x^2 - 1).$$

Ebből látható, hogy a differenciálhányados a $[-1, 1]$ intervallumon negatív, a $[-\infty, -1]$ és az $[1, \infty]$ intervallumon pedig pozitív. Azaz az $f(x)$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumon monoton csökkenő, ezen kívül monoton növekvő, lokális szélsőértékei a (-1)-ben, illetve az $x = 1$-ben vannak. Ezek alapján 3 esetet különböztetünk meg:

I. eset: $a < b \leq -1$.

Ekkor $f(a)$ és $f(b)$ is az f függvény $[-\infty, -1]$ monoton növekvő intervallumában van, így $f(a) \leq f(b)$, azaz $f(a) < f(b) + 4$.

II. eset: $1 < a < b$.

Hasonlóan mint az előbb látható, hogy $f(a) < f(b) + 4$.

III. eset: $a \leq -1$ és $b \geq 1$.

Ekkor az egyes intervallumokbeli monotonitás alapján $f(a) \leq f(-1)$, illetve $f(b) \geq f(1)$. Így $f(a) - f(b) \leq f(-1) - f(1) = 4$. Ebből $f(a) \leq f(b) + 4$.

A megoldásokból következik, hogy egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = -1$ és $b = 1$.

II. megoldás. Mivel $a < b$, ezért bevezethetjük a $b = a + k$ jelölést, ahol k egy nem negatív valós szám. Ekkor az állítás:

$$a^3 - 3a \leq (a+k)^3 - 3(a+k) + 4.$$

Elvégezve a köbreemelést, megfelelő egyszerűsítések után a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$0 \leq 3ka^2 + 3k^2a + k^3 - 3k + 4.$$

Osszuk el $3k$-val, és alakítsuk át az a-t tartalmazó tagokat teljes négyzetté:

$$0 \leq \left(a + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^3 - 3k + 4}{3k} - \frac{k^2}{4}.$$

Ebből, felhasználva, hogy $(k-2)^2(k+4) = k^3 - 12k + 16$, a

$$0 \leq \left(a + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{(k-2)^2(k+4)}{12k}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amiről könnyen látható, hogy igaz, mivel a jobb oldalon a négyzetes tag mellett egy nemnegatív tag áll. (k nem negatív!)

Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $\left(a + \frac{k}{2}\right)^2 = 0$ és $\frac{(k-2)^2(k+4)}{12k} = 0$, amiből $k = 2$, $a = -\frac{k}{2} = -1$ és $b = a + k = 1$.

(*Nagypál Éva,* Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)