2. Jelöljük a_k-val azoknak a 9-es számjegyet nem tartalmazó egészeknek a számát, amelyek $n\cdot 10^k$ és $(n+1)10^k-1$ közé esnek (ahol n 1 és 8 közötti egész). Ezeknek a $(k+1)$ jegyű számoknak az első számjegye n, a többi k db számjegy mindegyike 9-féle lehet (hiszen csak a 9-es nem fordulhat elő), így $a_k=9^k$.

Tekintsük a 10^{m+1}-nél kisebb, 9-es számjegyet nem tartalmazó pozitív egészek reciprokainak $S(10^{m+1})$ összegét az alábbi csoportosításban:

$$\begin{aligned}S(10^{m+1}) =&1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\dots+\frac{1}{18}\right)+\left(\frac{1}{20}+\dots+\frac{1}{28}\right)+\dots\\&\dots+\left(\frac{1}{80}+\dots+\frac{1}{88}\right)+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\dots+\frac{1}{188}\right)+\\&+\left(\frac{1}{200}+\dots+\frac{1}{288}\right)+\dots+\left(\frac{1}{800}+\dots+\frac{1}{888}\right)+\\&\vdots\\&+\left(\frac{1}{10^m}+\frac{1}{10^m+1}+\dots+\frac{1}{1\underbrace{88\dots8}_{m-\text{szer}}}\right)+\\&+\left(\frac{1}{2\cdot 10^m}+\frac{1}{28\dots8}\right)+\dots+\left(\frac{1}{8\cdot 10^m}+\dots+\frac{1}{8\ \underbrace{8\dots8}_{(m+1)-\text{szer}}}\right).\end{aligned}$$

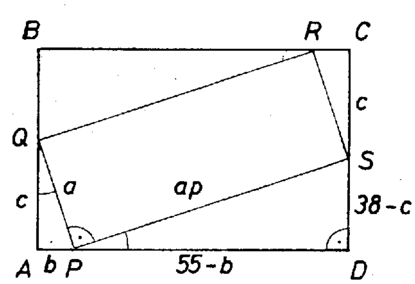
Minden zárójelben levő összeg helyett a zárójelben levő legnagyobb összeadandónak a zárójelben levő összeadandók számával való szorzatát írva:

$$\begin{aligned}S(10^{m+1})&<1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}+a_1\cdot\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}\right)+\\+a_2\cdot\frac{1}{100}&\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}\right)+\dots+a_m\cdot\frac{1}{10^m}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}\right)=\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}\right)\cdot\left(1+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\dots+\frac{9^m}{10^m}\right)=\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1-\frac{9^{m+1}}{10^{m+1}}}{1-\frac{9}{10}}<\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{8}\right)10<30.\end{aligned}$$

Beláttuk, hogy minden pozitív egész m-re $S(10^{m+1})<30$, ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

(*Podoski Károly,* Bp., Árpád Gimn. IV. o.)

4. Tekintsük először azt az esetet, amikor Ali Baba a $PQRS$ téglalap alakú szőnyegét elhelyezi az ábrának megfelelően az 55×38-as $ABCD$ szobában.



Legyen $PQ=a$ a téglalap rövidebb oldala; ekkor $PS=ap\ge a$, így $p\ge 1$. $AQP\sphericalangle=DPS\sphericalangle$ (mivel merőleges szárú szögek), ezért a QAP és PDS derékszögű háromszögek szögei megegyeznek, azaz a két háromszög hasonló.

Ebből következően
$$\frac{38-c}{b}=\frac{DS}{AP}=\frac{PS}{PQ}=p\quad\text{és}\quad\frac{55-b}{c}=\frac{PD}{AQ}=\frac{PS}{PQ}=p;$$

innen a következő egyenletrendszerhez jutunk: $38 - c = pb$; $55 - b = pc$, amiből

$$b = \frac{38p - 55}{p^2 - 1}, \quad \text{és} \quad c = \frac{55p - 38}{p^2 - 1}.$$

Alkalmazva a QAP derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét

$$a^2 = b^2 + c^2 = \left(\frac{38p - 55}{p^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{55p - 38}{p^2 - 1}\right)^2. \tag{1}$$

Abban az esetben, amikor Ali Baba a szőnyeget az 50×55-ös szobában helyezi el, az előzővel teljesen analóg módon kapjuk, hogy

$$a^2 = \left(\frac{50p - 55}{p^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{55p - 50}{p^2 - 1}\right)^2. \tag{2}$$

Az (1); (2) alapján

$$\left(\frac{38p - 55}{p^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{55p - 38}{p^2 - 1}\right)^2 = \left(\frac{50p - 55}{p^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{55p - 50}{p^2 - 1}\right)^2,$$

amiből rendezés után: $2p^2 - 5p + 2 = 0$; Az egyenlet gyökei

$$p_{1,2} = \begin{cases} 1/2 \\ 2 \end{cases}.$$

Mivel $p \geq 1$, ezért $p = 2$; ezt visszahelyettesítve az (1)-es összefüggésbe kapjuk, hogy $a = 25$; és $ap = 50$, vagyis a szőnyeg 25×50-es méretű.

(*Podoski Károly,* Bp., Árpád Gimn. IV. o. t.)

7. Határozzuk meg először az $\big(f_k(x)\big)$ függvénysorozatot! Ehhez a komplex számokat hívjuk segítségül. Mivel a feladatban csak a $\left(0; \frac{\pi}{n}\right)$ intervallumbeli x-ekről van szó ($n > 1$ egész), ezért feltehetjük, hogy $0 < x < \frac{\pi}{n}$. A továbbiakban k nemnegatív egészt jelöl. Legyen $S_1(x)$ és $S_2(x)$ az a két függvény, amely kielégíti az

$$S^2(x) = 2S(x)\cos x - 1 \tag{1}$$

egyenletet, továbbá tetszőleges $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvényekkel tekintsük a

$$g_k(x) = c_1(x) \cdot S_1^k(x) + c_2(x) \cdot S_2^k(x) \quad (k = 0,\, 1,\, 2, \dots)$$

függvénysorozatot. A másodfokú egyenlet megoldóképletét használva

$$S_{1,2}(x) = \frac{2\cos x \pm \sqrt{4\cos^2 x - 4}}{2} = \cos x \pm \sqrt{\cos^2 x - 1} = \cos x \pm i|\sin x|.$$

Mivel a $\cos x \pm i|\sin x|$ számok – valamilyen sorrendben – a $\cos x \pm i\sin x$ számokkal egyeznek meg, ezért feltehetjük, hogy

$$S_1(x) = \cos x + i\sin x \quad \text{és} \quad S_2(x) = \cos x - i\sin x.$$

Így

$$g_k(x) = c_1(x)(\cos x + i\sin x)^k + c_2(x)(\cos x - i\sin x)^k,$$

amiből a Moivre-képlet segítségével

$$g_k(x) = c_1(x)(\cos kx + i\sin kx) + c_2(x)(\cos kx - i\sin kx). \tag{2}$$

(1) alapján $S_1(x)$-re és $S_2(x)$-re fennáll az $S^{k+1}(x) = 2S^k(x)\cos x - S^{k-1}(x)$ egyenlőség, és ezért teljesül a $g_{k+1}(x) = 2g_k(x)\cos x - g_{k-1}(x)$ összefüggés is. Ez utóbbi azt jelenti, hogy ha a $c_1(x)$ és $c_2(x)$ függvényeket úgy választjuk, hogy $g_0(x) = 0$ és $g_1(x) = 1 - \cos x$ legyen, akkor az $\big(f_k(x)\big)$ függvénysorozatot éppen $\big(g_k(x)\big)$ adja meg. A $g_0(x) = 0$ feltételből

$$g_0(x) = c_1(x) \cdot S_1^0(x) + c_2(x) \cdot S_2^0 = c_1(x) + c_2(x) = 0,$$

vagyis $c_2(x) = -c_1(x)$. Ezt (2)-be beírva

$$\begin{aligned} g_k(x) &= c_1(x) \cdot (\cos kx + i\sin kx) - c_1(x) \cdot (\cos kx - i\sin kx) = \\ &= 2ic_1(x) \cdot \sin kx. \end{aligned}$$

Innen a $g_1(x) = 1 - \cos x$ feltételből

$$g_1(x) = 2ic_1(x) \cdot \sin x = 1 - \cos x, \quad \text{ahonnan}$$
$$2ic_1(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ miatt } \sin x \neq 0\right).$$

A kapott összefüggéssel

$$g_k(x) = 2ic_1(x) \cdot \sin kx = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \sin kx, \quad \text{azaz}$$

(3) $$f_k(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \sin kx.$$

Ezek után $F(x)$ megállapítása a feladatunk $\left(\text{legalábbis a } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ számokon}\right)$.
Az $\big(f_k(x)\big)$ függvénysorozat definíciója alapján

$$f_{k-1}(x) + f_{k+1}(x) = 2f_k(x) \cos x,$$

ahonnan

$$\big(f_0(x) + f_2(x)\big) + \big(f_1(x) + f_3(x)\big) + \dots + \big(f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x)\big) =$$
$$= 2f_1(x) \cos x + 2f_2(x) \cos x + \dots + 2f_n(x) \cos x = 2 \cos x\big(f_1(x) + f_2(x) \dots + f_n(x)\big),$$

tehát

$$f_0(x) + f_1(x) + 2\big(f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_{n-1}(x)\big) + f_n(x) + f_{n+1}(x) =$$
$$= 2 \cos x\big(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)\big).$$

Ebből $f_0(x) = 0$, és $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ felhasználásával

$$f_1(x) + 2\big(F(x) - f_1(x) - f_n(x)\big) + f_n(x) + f_{n+1}(x) = 2 \cos x \cdot F(x),$$

amit $F(x)$-re rendezve

$$F(x) = \frac{f_1(x) + f_n(x) - f_{n+1}(x)}{2(1 - \cos x)} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ miatt } 1 - \cos x \neq 0\right).$$

A kapott kifejezésbe $f_1(x)$, $f_n(x)$ és $f_{n+1}(x)$ (3)-beli értékét beírva – $(1 - \cos x)$-szel való egyszerűsítés után –

(4) $$F(x) = \frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2 \sin x}.$$

Végül belátjuk a feladatbeli egyenlőtlenségeket.

a) Tegyük fel, hogy $0 < x < \dfrac{\pi}{n+1}$ $(n > 1)$ egész). Azt kell megmutatnunk, hogy $0 < F(x) < 1$, ami ekvivalens lépésekkel átalakítva

$$0 < \frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2 \sin x} < 1,$$
$$0 < \sin x + \sin nx - \sin(n+1)x < 2 \sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ miatt } 0 < 2 \sin x\right),$$
$$-\sin x < \sin nx - \sin(n+1)x < \sin x,$$
$$\sin x > \sin\,(n+1)x - \sin nx > -\sin x.$$

A középső különbséget szorzattá alakítva a bizonyítandó:

$$\sin x > 2 \cos \frac{2n+1}{2} x \sin \frac{x}{2} > -\sin x,$$
$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} > 2 \cos \frac{2n+1}{2} x \sin \frac{x}{2} > -2 \sin \frac{x}{2}\, cos \frac{x}{2},$$
$$\cos \frac{x}{2} > \cos \frac{2n+1}{2}\, x > -\cos \frac{x}{2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ miatt } 0 < 2 \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

A $-\cos \dfrac{x}{2} = \cos\left(\pi - \dfrac{x}{2}\right)$ helyettesítés után a következő egyenlőtlenséget kell igazolnunk:

$$\cos \frac{x}{2} > \cos \frac{2n+1}{2}\, x > \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right).$$

Ez viszont fennáll, hiszen a $(0;\pi)$ intervallumban az $x \mapsto \cos x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, továbbá

$$0 < \frac{x}{2} < \frac{2n+1}{2}x < \pi - \frac{x}{2} < \pi, \quad \text{mert} \quad 0 < x < \frac{\pi}{n+1} \quad \text{és} \quad 0 < n.$$

Ekvivalens átalakításokat használtunk, tehát ebben az esetben beláttuk a feladat állítását.

b) Tegyük fel, hogy $\frac{\pi}{n+1} < x < \frac{\pi}{n}$. Azt kell megmutatnunk; hogy $1 < F(x)$, ami ekvivalens lépésekkel átalakítva

$$1 < \frac{\sin x + \sin nx - \sin(n+1)x}{2 \sin x},$$

$$2 \sin x < \sin x + \sin nx - \sin(n+1)x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \ \text{ miatt } \ 0 < 2 \sin x\right),$$

$$\sin(n+1)x + \sin x < \sin nx.$$

A bal és a jobb oldalt szorzattá alakítva a bizonyítandó:

$$2 \sin \frac{n+2}{2} x \cos \frac{n}{2} x < 2 \sin \frac{n}{2} x \cos \frac{n}{2} x,$$

$$\sin \frac{n+2}{2} x < \sin \frac{n}{2} x \qquad \left(0 < \frac{n}{2} x < \frac{\pi}{2} \quad \text{miatt} \ \ 0 < 2 \cos \frac{n}{2} x\right).$$

A $\sin \frac{n}{2} x = \sin\left(\pi - \frac{n}{2} x\right)$ helyettesítés után a következő egyenlőtlenséget kell igazolnunk:

$$\sin \frac{n+2}{2} x < \sin\left(\pi - \frac{n}{2} x\right).$$

Ez viszont fennáll, hiszen a $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ intervallumban az $x \mapsto \sin x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, továbbá

$$\frac{3\pi}{2} > \frac{n+2}{2} \cdot \frac{\pi}{n} > \frac{n+2}{2} x > \pi - \frac{n}{2} x > \frac{\pi}{2}, \quad \text{mert}$$
$$\frac{\pi}{n+1} < x < \frac{\pi}{n} \quad \text{és} \quad 2 \le n.$$

Most is ekvivalens átalakításokat használtunk, így ebben az esetben is beláttuk a feladat állítását.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Ha a (3) eredményt valamilyen úton megsejtjük, akkor azt k szerinti teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk az ismert

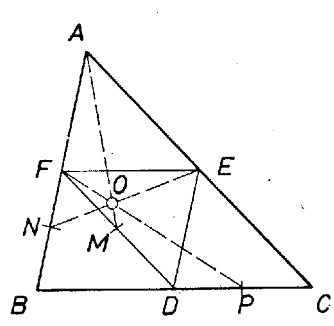
$$\sin(k+1)x = 2 \cos x \cdot \sin kx - \sin(k-1)x$$

azonosság alapján. Ezzel a megoldás lényegesen egyszerűsíthető.

(*Harcos Gergely* Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)

8. Az állítás első felét tetszőleges háromszögre bizonyítjuk. A sík tetszőleges pontjából indítsunk vektorokat a megadott pontokhoz, mindegyiket a megfelelő kisbetűvel jelölve. Ekkor

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2},$$
$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2},$$
$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2},$$
$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{c}}{2} = \frac{\mathbf{b} + 3\mathbf{c}}{4}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{f} + \mathbf{b}}{2} = \frac{3\mathbf{b} + \mathbf{a}}{4},$$
$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{f}}{2} = \frac{\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}}{4}.$$



Legyen FP és EN metszéspontja O_1; legyen $FO_1 : O_1P = \lambda_1 : (1-\lambda_1)$ és $EO_1 : O_1N = \mu_1 : (1-\mu_1)$. Ekkor fenn kell állnia a

$$\lambda_1\mathbf{p} + (1-\lambda_1)\mathbf{f} = \mu_1\mathbf{n} + (1-\mu_1)\mathbf{e}$$

vektoregyenlőségnek. Beírva a fenti kifejezéseket, az együtthatók összehasonlításából adódik, hogy ez pontosan akkor áll fenn, ha $\lambda_1 = \frac{2}{7}$ és $\mu_1 = \frac{4}{7}$.

Hasonlóan, FP és AM metszéspontját O_2-vel jelölve,

$$FO_2 : O_2P = \lambda_2 : (1-\lambda_2) \quad \text{és} \quad AO_2 : O_2M = \mu_2 : (1-\mu_2)$$

esetén

$$\lambda_2\mathbf{p} + (1-\lambda_2)\mathbf{f} = \mu_2\mathbf{m} + (1-\mu_2)\mathbf{a}.$$

Ebből $\lambda_2 = \lambda_1 = \frac{2}{7}$ és $\mu_2 = \frac{6}{7}$. Vagyis AM és EN metszéspontja ráesik FP-re, és ezzel első állításunkat (tetszőleges háromszögre) beláttuk.

Továbbá, most már csak szabályos háromszögre, az FDP és az EFN háromszög egybevágó, hiszen az ABC háromszög középpontja körüli -120°-os elforgatás nyilván F-nek E-t, D-nek F-et és P-nek N-et felelteti meg. Egybevágóak továbbá az EFN és az AFM háromszögek is, mert $EF = AF$, $FN = FM$ a szabályos háromszögekből, és az F-nél levő szögek egyenlők (120°-kal). Ezekből $AM = EN = FP$, és így

$$\begin{aligned} OM : OF : ON : OE : OP : OA &= (1-\mu_2) : \lambda_1 : (1-\mu_1) : \mu_1 : (1-\lambda_1) : \mu_2 = \\ &= 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6. \end{aligned}$$

Ezzel a megoldást befejeztük.

(*Szendrői Balázs,* Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)