A Bolyai János Matematikai Társulat Ifjúsági Matematikai Köre 1989. december 27–28-án tartott téli ankétjának olimpiai előkészítő feladatai.

1. Az ABC háromszög területe t; köré írt körének sugara R, a belső szögfelezők a kört másodszor rendre az A', B', C' pontokban metszik. Az $A'B'C'$ háromszög területe T. Bizonyítsuk be, hogy $16\,T^3 \geq 27\,R^4 t$.

(Csehszlovákia)[1]

2. Bizonyítsuk be, hogy a 9-es számjegyet nem tartalmazó, különböző pozitív egészek reciprokainak az összege nem lehet nagyobb 30-nál.

(Franciaország)

3. a, b, c, d olyan pozitív egészek, amelyekre $ab = cd$ és $a + b = c - d$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan egész oldalhosszúságú derékszögű háromszög, amelynek területe ab-vel egyenlő.

(Anglia)

4. Ali Baba szőnyegkereskedő téglalap alakú szőnyeget árul. Tönkrement minden mérőeszköze, de szerette volna tudni egyik szőnyegének a méreteit. Észrevette, hogy két téglalap alakú szobájában is el tudja helyezni a szőnyegét úgy, hogy a szőnyeg minden sarka hozzáérjen a szoba egy–egy falához. Mekkorák a szőnyeg méretei, ha a szobák mérete 38×55, ill. 50×55 (láb)?

(Ausztrália)

5. Legyen $0 < a < 1$ adott valós szám, és legyen f a $[0,1]$ intervallumban folytonos függvény, amelyre $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ és minden intervallumbeli $x \leq y$-ra

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$$

teljesül. Határozzuk meg $f\left(\frac{1}{7}\right)$-et.

(Finnország)

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $a < b$, akkor $a^3 - 3a \leq b^3 - 3b + 4$ (a, b valós). Teljesülhet-e az egyenlőség?

(Svédország)

7. Legyen $n > 1$, egész. Értelmezzük a következő függvénysorozatot:

$$f_0(x) = 0, \quad f_1(x) = 1 - cosx, \ldots, f_{k+1}(x) = 2f_k(x)\cos x - f_{k-1}(x),$$

és legyen

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x).$$

Bizonyítsuk be, hogy

a) $0 < F(x) < 1$, ha $0 < x < \pi/(n+1)$;

b) $F(x) > 1$, ha $\pi/(n+1) < x < \pi/n$.

(USA)

8. Az ABC szabályos háromszögben a BC, CA, AB, FD, FB, DC szakaszok felezőpontjai rendre D, E, F, M, N, P. Bizonyítsuk be, hogy az AM, EN és FP szakaszok egy O ponton mennek át. Számítsuk ki az $OM : OF : ON : OE : OP : AO$ arányokat.

(Hongkong)

[1] A megjelölt országok a feladatokat a XXX. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára javasolták.