1. *Oldja meg a következő egyenletrendszert:*

$$\sin\ x = 2\sin\ y,$$
$$x + y = \frac{2\pi}{3}.$$

Megoldás. A második egyenletből $y = \frac{2\pi}{3} - x$, ezt az első egyenletbe helyettesítve

$$\sin\ x = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right),$$
$$\sin\ x = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\cos\ x + \frac{1}{2}\sin\ x\right),$$
$$\cos\ x = 0.$$

Innen $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\quad y = \frac{\pi}{6} - n\pi,\quad n \in \mathbf{Z}$.
Mivel minden átalakítás ekvivalens volt, ezért ezek valóban megoldások.

2. *Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket:*
a) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} > -1$;
b) $\log_{\frac{1}{2}}(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) < -2$.

Megoldás. a) Mivel a négyzetgyökös kifejezés csak pozitív vagy nulla értéket vehet fel, ezért a megoldások egybeesnek az $x^2 - 5x + 4 \geqq 0$ egyenlőtlenség megoldásaival, tehát $x \geqq 4$ vagy $x \leqq 1$.

b) Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmus-függvény szigorú monoton csökkenése miatt

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 8 > 4,$$

ekkor nyilván $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 > 0$, ami x-re nézve másodfokú egyenlőtlenség. Innen $2^x > 4,\ x > 2$ vagy $2^x < 1,\ x < 0$, és ezek az x-ek valóban megoldások.

3. *Az ABC háromszögben $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ egység, $BAC\sphericalangle = 75°$. Az ABC háromszög köré írt köre A-t nem tartalmazó BC ívén vegyük fel az O pontot úgy, hogy $BAD\sphericalangle = 30°$ legyen. Számítsa ki az AD szakasz hosszát.*

Megoldás. Készítsen ábrát! Legyen r a háromszög köré írt kör sugara. Mivel $BAD\sphericalangle = 30°$, ezért $DAC\sphericalangle = 75° - 30° = 45°$, tehát

$$BD = 2r\sin\ 30° = r \quad \text{és}$$
$$CD = 2r\sin\ 45° = r\sqrt{2}.$$

Legyen $AD = x$. Alkalmazzuk a koszinusztételt az ABD és az ADC háromszögekben.

$$r^2 = 3 + x^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot \cos\ 30°,$$
$$2r^2 = 2 + x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot \cos\ 45°,$$

azaz $r^2 = 3 + x^2 - 3x$, és $2r^2 = 2 + x^2 - 2x$. Innen $x = AD = 2$ egység ($r = 1$ egység).

4. *Egy számtani sorozat differenciája $\frac{1}{2}$. Az első n elem összege 38, az első $n + 4$ elemé 69. Mekkora az n értéke és mennyi a sorozat első eleme?*

Megoldás. Alkalmazzuk a számtani sorozatokra megismert

$$S_k = \frac{k}{2}(2a_1 + (k-1)d)$$

képletet.

$$38 = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}\right),$$
$$69 = \frac{n+4}{2}\left(2a_1 + (n+3) \cdot \frac{1}{2}\right).$$

A második egyenletet n-nel, az elsőt $-(n+4)$-gyel szorozva, majd az egyenleteket összeadva, rendezve az $n^2-27n+152=0$ egyenlethez jutunk. Innen $n=8$ vagy $n=19$. Ha $n=8$, akkor $a_1=3$, ha $n=19$, akkor $a_1=-\frac{5}{2}$, és mindkettő valóban megoldás.

5. *Egy forgáskúpba beírt gömb térfogata harmada a kúp térfogatának. A gömb felszíne hányad része a kúp felszínének?*

Megoldás. Legyen a forgáskúp alapkörének sugara R, magassága m, a gömb sugara r. A feltétel szerint

$$3\cdot\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{R^2\pi m}{3},$$

$$12r^3=R^2m. \tag{1}$$

Készítsük el az alakzat egy szimmetria síkmetszetét! Egyenlő szárú háromszög (alapja $2R$, magassága m a beírt körével (a kör sugara r).) Legyen a a kúp alkotójának a hossza. Hasonló háromszögek megfelelő oldalainak arányaként kapjuk, hogy

$$\frac{a}{R}=\frac{m-r}{r},\quad\text{ahonnan}$$

$$r(a+R)=mR. \tag{2}$$

A gömb felszíne $A_1=4r^2\pi$, a forgáskúp felszíne $A_2=R\pi(R+a)$.
$\frac{A_1}{A_2}=\frac{4r^2}{R(R+a)}$. A (2) és az (1) feltételek alkalmazásával

$$R(R+a)=\frac{mR^2}{r}=\frac{12r^3}{r}=12r^2,\quad\text{így}$$

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{4r^2}{12^2}=\frac{1}{3}$, azaz a gömb felszíne szintén harmada a kúp felszínének. (Igaz-e az állítás általánosítása n-ed részre?)

6. *Az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola átmegy az $A(4;\ -7)$ ponton és érinti az $y=1$ egyenletű egyenest. Az A pontban a parabolához húzott érintő egy normálvektora $n(8;1)$. Írja fel a parabola egyenletét!*

Megoldás. A feltételek szerint a parabola egyenlete

$$y=a(x-u)^2+1$$

alakban írható. Az A pont rajta van a parabolán, így

$$-7=a(4-u)^2+1,\quad -8=a(4-u)^2. \tag{1}$$

Az A pontban húzott érintő egyenlete $8x+y=25$. Az érintő és a parabola által alkotott egyenletrendszer megoldása során kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$y=25-8x.$$
$$a(x-u)^2+1=25-8x,$$
$$ax^2-2(au-4)x+au^2-24=0,$$
$$D=4(au-4)^2-4a(au^2-24)=0.$$

Ebből

$$a(u-3)=2. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletből adódik, hogy

$$-8(u-3)=2\cdot(4-u)^2,$$

ahonnan $u=2$, így $a=-2$.
A parabola egyenlete: $y=-2(x-2)^2+1$.
(A feladat differenciálszámítással és a parabola tulajdonságainak alkalmazásával kevesebb számítással is megoldható.)

7. *Oldja meg a*

$$\sqrt{x^2+3x+2+\frac{p^2}{x^2}}=x+1-\frac{p}{x}$$

egyenletet, ahol p valós paraméter!

Megoldás. Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát, és vegyük figyelembe, hogy $x \neq 0$.

$$x^2+3x+2+\frac{p^2}{x^2}=x^2+2x+1-2(x+1)\frac{p}{x}+\frac{p^2}{x^2},$$
$$(x+1)\left(1+\frac{2p}{x}\right)=0.$$

Az $x_1=-1$ akkor gyöke az egyenletnek, ha kielégíti azt, azaz ha $\sqrt{p^2}=p$, tehát ha $p \geqq 0$.
Az $x_2=-2p$ akkor gyöke az egyenletnek, ha $p \neq 0$.

$$\sqrt{4p^2-6p+2+\frac{1}{4}}=-2p+\frac{3}{2}$$

és

$$\left|2p-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}-2p,$$

azaz $\frac{3}{2}-2p \geqq 0,\ p \leqq \frac{3}{4}$. Összefoglalva:
1. Ha $p<0$, akkor az egyenlet megoldása x_2.
2. Ha $p=0$, akkor a megoldás x_1.
3. Ha $0<p \leqq \frac{3}{4}$, akkor a megoldások $x_1,\ x_2$.
4. Ha $p>\frac{3}{4}$ akkor a megoldás x_1.

8. *Legyen az ABC háromszög kerülete $2s=24$ egység. Húzzuk meg a beírt körének az oldalakkal párhuzamos érintőit. Ezen érintőknek a háromszögön belül eső szakaszai közül válasszuk ki a legnagyobbat. Mely ABC háromszög esetén lesz ez az érintőszakasz a lehető legnagyobb?*

Megoldás. Rajzoljuk meg az ABC háromszöget a beírt körével, és a BC oldallal (jelölje a) párhuzamos érintőszakasszal, ezt jelölje x.
A külső pontból húzott érintő szakaszok egyenlőségéből következik, hogy a beírt érintőszakasz által lemetszett háromszög kerülete $2(12-a)$ (általában $2(s-a)$). A lemetszett és az adott háromszög hasonlóságából

$$\frac{x}{a}=\frac{2(12-a)}{24},$$
$$x=\frac{1}{12}a(12-a).$$

x akkor a legnagyobb, ha $a=6$, ami az

$$x=\frac{1}{12}\left(36-(a-6^2)\right)$$

alakból megállapítható. Ha $a=6$, akkor $x=3$.
Ilyen háromszög létezik, hiszen ekkor $b+c=18$, $6=a$.