Felhasználva, hogy a, b, c, d pozitív,

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$$

és

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2,$$

azaz $1 < S < 2$, tehát az értékkészlet az $(1,2)$ intervallumba esik. Megmutatjuk, hogy az értékkészlet ki is tölti az $(1,2)$-t.

Legyen először $a = b = x$, $c = d = 1$. Ekkor

$$S = S(x) = \frac{2x}{2x+1} + \frac{2}{2+x} = \frac{2}{2+\frac{1}{x}} + \frac{2}{2+x},$$

és itt x tetszőleges pozitív szám lehet. $x \to 0$ esetén $S(x) \to 1$, $x = 1$ esetén $S(1) = \frac{4}{3}$, így Bolzano tétele miatt a folytonos $S(x)$ függvény a $(0,1)$ intervallumban minden 1 és $\frac{4}{3}$ közé eső értéket felvesz.

Legyen másodszor $a = c = x$, $b = d = 1$. Ekkor

$$S = Sx = \frac{2x}{x+2} + \frac{2}{2x+1} = \frac{2}{1+\frac{2}{x}} + \frac{2}{1+2x},$$

és x megint tetszőleges pozitív szám lehet. $x \to 0$ esetén $S(x) \to 2$, $x = 1$-re $S(1) = \frac{4}{3}$, és megint Bolzano tételére hivatkozva $S(x)$ minden $\frac{4}{3}$ és 2 közötti értéket felvesz a $(0,1)$ intervallumon. S értéke tehát végigfut az összes 1 és 2 közötti számokon.

Hidjapusztai Andor (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A határértékre, folytonosságra és a Bolzano-tételre való hivatkozás nélkül is beláthatjuk, hogy S minden 1 és 2 közötti y számot feltesz. Ehhez $1 < y \leq \frac{4}{3}$ esetén a

$$\frac{2}{2+\frac{1}{x}} + \frac{2}{2+x} = y,$$

$\frac{4}{3} \leq y < 2$ esetén a

$$\frac{2}{1+\frac{2}{x}} + \frac{2}{1+2x} = y$$

egyenletet kell megoldani.

Ezeket rendezve, x-ben másodfokú egyenletek adódnak, melyek megoldhatóságát éppen az y-ra tett kikötések biztosítják. Ugyanezekből az is látható, hogy a (létező) gyökök mindig pozitívak.

Lugosi Erzsébet (Cegléd, Kossuth L. Gimn., III. o. t.)