Sokszor voltam tagja különböző szintű versenyek bizottságának. Ezekben a tételek összeválogatása a teendő, majd az eredmény lemérése. Lapunk szerkesztőbizottságának „kitűzési” ülései is ilyesfélék. Az a szokás, hogy az előadott javaslatokat, ötleteket „megvariáljuk”, csavargatjuk; mérlegeljük a nehézségeket, a megfogalmazást stb. Nemegyszer messze elkalandozunk, ki-ki a kedve szerint. – Most odaképzelem magamat az 1989. évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpia válogató ülésére, de csak az ottani 1. feladatra szorítkozom: *„Bizonyítsuk be, hogy az* $1, 2, \ldots, 1989$ *halmaz előáll* 117 *darab olyan diszjunkt halmaz,* $A_1, A_2 \ldots, A_{117}$ *egyesítéseként, amelyekre teljesül, hogy*

a) *mindegyiküknek* 17 *eleme van, továbbá, hogy*

b) *mindegyikükben ugyanannyi az elemek összege.”*

(Megoldása a KÖMAL 1989. évi 8–9. szám 348. oldalán.)

Kanada képviselője talán ezt gondolta: „a mi CRUX-unkban pár hónapja jelent meg ez a kérdés, de általánosabban, ti., hogy (az 1989-es szám helyett) mely n-ekre van ilyen elrendezés.” – Bizonyára többen is mondták: „ezt nem lehet kihagyni!” Bár gyakori, hogy a tetszőleges n szám helyére beírják az éppen aktuális évszámot, de itt a $17 \cdot 117$ prímfelbontásnak lényegesebb szerepe van.

Ezért néztem meg a „fordított” kérdést: 17 részhalmazt alakítani egyezően 117 számmal és egyező összegekkel. Nekem ez valamivel könnyebbnek látszik, mivel – a közölt megoldáshoz kapcsolódva – kicsit kevesebbet kell beszélni az „előrendezés” utáni kiegyenlítésekről. Az ottani 8-as helyett 58-as „falkákban” lehetne beírni a sorokba a számokat ($117-1$ fele 58), és azután a $2k$-adik és $(2k+1)$-edik sorok kiegyenlítése mindig elérhető egyetlen cserével. (Megtartva persze azt a tulajdonságot, hogy a táblázat A sávjának minden z számával egy sorban van a C sávban az $1990 - z$ szám, a halmazbeli *aritmetikai tükörkép* (számtani kép) a középső 995-ös centrumra nézve.)

Az ilyen elrendezés nyilván sokféleképpen változtatható, akárcsak az eredeti feladat megoldásáé. Kézenfekvő sejtés, hogy olyan elrendezései is vannak a halmaznak 17×117 mezőben, hogy minden sorösszeg egyenlő, és minden oszlopösszeg is (akkor persze $117 \cdot 995$, illetőleg $17 \cdot 995$ a közös érték). Az ilyen elrendezéseket *bűvös téglalapnak* nevezik.

Egy további elgondolás: ha van ilyen elrendezés, arra építve, már olyat is föl lehet írni az $\{1, 2, \ldots 1989^2\}$ számokból 1989×1989 mezőben, hogy minden sor- és oszlopösszeg egyenlő. Ez *félig bűvös négyzet* lenne. (Szerencsés esetben a két átlóra is adódhat ugyanaz az összeg, és akkor bűvös négyzetről beszélhetünk.)

Az utóbbi sejtésnek az az alapja, hogy a 15 is „CRUX-os szám”, és hogy az 1–2. ábrák 3×5 mezős, valamint 5×3 mezős bűvös téglalapjai alapján valóban lehet 15×15-ös bűvös négyzetet felírni, és ez lényegesen más, mint „klasszikus” menetvonalas beírásmód szerinti. A 2. ábra az 1.-ből származik $-90°$-os elforgatással, mezőnként 1 levonással, végül 15-tel szorozva: így lett pl. a 14-ből 195. Az 1. ábra centrális, vagyis a 8-as középszámra tükrös helyzetű számpárok aritmetikailag tükrösek, pl. 9+7=16. Ezért a 2. ábrán is egyenlők a megfelelő összegek, és pl. $195 + 15 = 2 \cdot 105$. Ez biztosítja a felírandó 15×15-ös négyzet átlóinak bűvösségét.

Ilyen négyzetet a következőképpen nyerhetünk: A 15×15 mezőt 15 db 3 soros, 5 oszlopos téglalapra osztjuk, azaz 5 vízszintes sávra és 3 függőleges sávra, egyenként 15 mezővel. Minden mezőbe két szám összege kerül. Az első tag téglalaponként közös, a 2. ábrából vesszük át, helyzet szerint. A második tag minden téglalapban az 1. ábra szerinti.

9	11	12	6	2
1	3	8	13	15
14	10	4	5	7

1. ábra

195	0	120
135	30	150
45	105	165
60	180	75
90	210	15

2. ábra

Bemutatom az első vízszintes osztóvonal fölötti és alatti sort:

209	205	199	200	202	14	10	4	5	7	134	130	124	125	127
144	146	147	141	137	39	41	42	36	32	159	161	162	156	152

A teljes, 15×15-ös négyzet szintén centrális, átlóinak összege egyezik a sorok, oszlopok közös, 1695-ös összegével, 15×113-mal (113 az 1 és 15^2 számtani közepe.)

Ez az elrendezés a 15-ös számrendszerre is támaszkodik. Így lehet könnyen belátni, hogy csupa különböző szám szerepel benne. Az 1-esekkel csökkentett 0-224 számok 15-ös alapú számrendszerbe elképzelt átírását használtuk, pl. a felső példasor végén a 127 a $126 = 8 \cdot 15 + 6 =^{15} 86$ csökkentettje, és ennek számjegyei az első ábra 9-eséből és 7-eséből származnak.

Visszakanyarodva az olimpiai feladat „elfordítottjához”, annak az előkészítő B sávjában is lehetne használni „közönséges” 17-edrendű bűvös négyzetet is, minden számát $850 = 17 \cdot 50$-nel emelve, hogy az $\dfrac{1+289}{2} = 145$-ös középszám helyére 995 jusson.