Ebben a cikkben egy olyan – rendhagyónak nevezhető –függvénnyel foglalkozunk, amelyet számjegyek átlagának segítségével értelmezünk.

Az egyszerűség kedvéért a számokat nem tizedes, hanem kettedes (diadikus) tört alakban kezeljük. A 10-es alaphoz hasonlóan itt is igaz, hogy minden valós x szám felírható

$$x = \pm\beta_k\beta_{k-1}\dots\beta_1\beta_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$$

kettedes tört alakban, ahol a β_i, α_j számjegyek értéke 0 vagy 1 lehet. Ez a felírás egyértelművé tehető azzal, ha megtiltjuk, hogy a kettedes jegyek valahonnan kezdve csupa 1-esek legyenek; azaz

$$\beta_k\beta_{k-1}\dots\beta_0,\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t,\ 111\ \dots$$

helyett mindig a

$$\beta_k\beta_{k-1}\dots\beta_0,\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_t + \frac{1}{2^t}$$

eredményeként adódó „véges” alakot használjuk.

Könnyen értelmezhetjük egy 0 és 1 közé eső diadikus tört első n jegyének átlagát: legyen

$$x = 0,\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\text{-re}\quad S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

A g függvény minden ilyen x helyen vegye fel a

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

értéket, amennyiben ez a határérték létezik. Ezzel a g függvényt a $[0, 1]$ intervallum valamely részhalmazán értelmeztük. (Látható, hogy $0 \leqq S_n(x) \leqq 1$, így $0 \leqq g(x) \leqq 1$.)

Elsőként azt vizsgáljuk meg, van-e olyan y szám, melyre $g(y) = y$, vagyis y megegyezik saját számjegyeinek az átlagával. Ezután g értelmezési tartományának a „nagyságát” határozzuk meg, majd igazoljuk, hogy g értéke „majdnem mindig” $\frac{1}{2}$.

1. *Legyen $0 \leqq a < b \leqq 1$. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a,\ b]$ intervallumon, és itt minden x-re $0 \leqq f(x) \leqq 1$. Megmutatjuk, hogy ekkor létezik olyan y ($[a,\ b]-$ben), melyre $f(y) = g(y)$.* (Speciálisan az $f(x) = x$ függvényre kapjuk, hogy alkalmas y-ra $g(y) = y$ teljesül.)

Előállítjuk a kívánt tulajdonságú y számot. Mivel $b - a$ pozitív, ezért alkalmas n természetes számra $2 \cdot \frac{1}{2^n} < b - a$. A $0,\ \frac{1}{2^n},\ 2\cdot\frac{1}{2^n},\ 3\cdot\frac{1}{2^n},\ \dots$ számsorozatnak így legalább két szomszédos eleme az $(a,\ b)$ nyílt intervallumba esik; jelölje ezek kisebbikét x_n. Ekkor nyilván

$$x_n = 0,\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \quad\text{és}\quad a < x_n < x_n + \frac{1}{2^n} < b. \tag{1}$$

Ezután rekurzíven definiáljuk az $x_n, x_{n+1}, \dots$ végtelen sorozatot, úgy, hogy x_{k+1}, az x_k-ból egy további kettedesjegy hozzáírásával keletkezzen a következőképpen: Ha $x_k = 0,\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k$, akkor legyen $x_{k+1} = 0,\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\alpha_{k+1}$, ahol $\alpha_{k+1} = 1$, ha $S_k(x_k) < f(x_k)$, ill. $\alpha_{k+1} = 0$, ha $S_k(x_k) \geqq f(x_k)$. Ha x_n után tetszőleges 0–1 sorozatot írunk, (1) szerint a kapott szám is $[a,\ b]$-ben lesz; ezért $a < x_n < x_{n+1} < \dots \leqq b$. Legyen $y = \lim_{k\to\infty} x_k$, ekkor $a < y \leqq b$, és az f függvény folytonossága következtében $f(y) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$. Megmutatjuk, hogy $f(y) = g(y)$. Ehhez azt kell belátni, hogy minden ε pozitív számhoz található olyan m, amellyel minden m-nél nagyobb k természetes számra $|S_k(y) - f(y)| \leqq \varepsilon$. Legyen tehát ε egy ilyen rögzített pozitív érték. Mivel $f(y)$ az $f(x_k)$ sorozat határértéke, azért van olyan m_0, hogy

$$f(y) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_k) < f(y) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

minden m_0-nál nagyobb k-ra.

Belátjuk továbbá, hogy ha $k > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, akkor

$$|S_{k+1}(y) - S_k(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

is teljesül. Ha ugyanis $\alpha_{k+1} = 0$, akkor

$$|S_{k+1}(y) - S_k(y)| = \left|S_k(y)\frac{k}{k+1} - S_k(y)\right| = S_k(y)\cdot\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{k+1} < \varepsilon.$$

Ezután bebizonyítjuk, hogy létezik olyan $\left(m_0\text{-nál és } \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\text{-nál nagyobb}\right)$ m természetes szám, amelyre

$$f(y)-\frac{\varepsilon}{2}<S_m(y)<f(y)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Ha ilyen m nem létezne, akkor (3) miatt vagy minden – elég nagy – k-ra $S_k(y)\leqq f(y)-\frac{\varepsilon}{2}$, vagy minden – elég nagy – k-ra $S_k(y)\geqq f(y)+\frac{\varepsilon}{2}$ állna fenn. Az első esetben azonban $\alpha_{k+1}=1$ következtében $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(y)=1$, így $f(y)-\frac{\varepsilon}{2}\geqq 1$, ami az f-re tett feltevésünknek ellentmond. A második esetben ugyanígy $\alpha_{k+1}=0$ miatt $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(y)=0$, amiből $0\geqq f(y)+\frac{\varepsilon}{2}$, szintén ellentmondás.

Az így kapott m számra most már igazolhatjuk, hogy

$$|S_k(y)-f(y)|\leqq\varepsilon,\quad \text{ha}\quad k>m.$$

Ennek bizonyítását indirekt úton végezzük el. Tegyük fel, hogy a kívánt egyenlőtlenség nem teljesül minden, m-nél nagyobb k-ra; legyen k a legkisebb olyan természetes szám, melyre $k>m$ és $|S_k(y)-f(y)|>\varepsilon$. Ez utóbbi egyenlőtlenség kétféleképpen valósulhat meg.

1 eset: $S_k(y)>f(y)+\varepsilon$. Mivel a k számot a lehető legkisebbnek választottuk, ezért (és (4) miatt, ha $k=m+1$)

$$S_{k-1}(y)<f(y)+\varepsilon \tag{5}$$

(3) miatt viszont esetünkben

$$S_{k-1}(y)>f(y)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

tehát (2), (6) és (5) egybevetéséből

$$f(x_{k-1})<f(y)+\frac{\varepsilon}{2}<S_{k-1}(y)=S_{k-1}(x_{k-1}) \tag{7}$$

és

$$S_{k-1}(x_{k-1})=S_{k-1}(y)<f(y)+\varepsilon<S_k(y)=S_k(x_k). \tag{8}$$

Definíciónk (7) alapján az $\alpha_k=0$ jegyet adja, ekkor azonban $S_k(x_k)\leqq S_{k-1}(x_{k-1})$, ami ellentmond (8)-nak.

2. eset: $S_k(y)<f(y)-\varepsilon$. A k minimalitása folytán most

$$S_{k-1}(y)>f(y)-\varepsilon, \tag{5'}$$

míg (3) miatt ezúttal

$$S_{k-1}(y)<f(y)-\frac{\varepsilon}{2}, \tag{6'}$$

tehát (2), (6′) és (5′) értelmében

$$f(x_{k-1})>f(y)-\frac{\varepsilon}{2}>S_{k-1}(y)=S_{k-1}(x_{k-1}) \tag{7'}$$

és

$$S_{k-1}(x_{k-1})=S_{k-1}(y)>f(y)-\varepsilon>S_k(x_k). \tag{8'}$$

A (7′) következtében $\alpha_k=1$, így $S_k(x_k)\geqq S_{k-1}(x_{k-1})$; ez ellentmond (8′)-nek.

Mivel az ε bármilyen (kicsi) pozitív szám lehet, ezért valóban $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(y)=f(y)$.

2. $[0,\ 1]$*-ben g értelmezési tartománya, valamint azon pontok halmaza, melyekben g nem értelmezett, egyaránt kontinuum számosságú.*

A) Az előző részben bizonyított tételt az $f(x)=c$, $(0\leqq c\leqq 1)$ konstans függvényekre alkalmazva azt kapjuk, hogy g minden $[0,\ 1]$-beli értéket fölvesz, így az értelmezési tartománya is (legalább) kontinuum számosságú.

B) Tegyük fel ezután, hogy az $x=0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots$ helyen g nincs értelmezve. Változtassuk meg x néhány négyzetszám sorszámú helyen álló kettedesjegyét. Megmutatjuk, hogy az így létrejövő y helyen sem értelmes a g függvény. Tegyük fel ugyanis, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(y)$ létezik. A

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=kS_k(x)\quad \text{és}\quad kS_k(y)$$

összegek legfeljebb az 1., 4., 9., … t^2-edik helyeken különbözhetnek egymástól, ahol $t^2 \leqq k$. Így

$$|kS_k(x) - kS_k(y)| \leqq \sum_{i=1}^{t} 1 = t \leqq \sqrt{k},$$

ezért

$$|S_k(x) - S_k(y)| \leqq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Ekkor azonban $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(x) - S_k(y) = 0$, következésképpen $S_k(x)$ is konvergens lenne; ennek az ellenkezőjét tettük fel, tehát $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(y)$ sem létezik.

Az így kapható y számok számossága megegyezik a (végtelen) 0–1 sorozatok számosságával, hiszen éppen egy ilyen sorozattal jelölhető ki, hogy mely számok négyzeteinek megfelelő helyen változtatjuk meg x-et: a sorozat i-edik eleme pontosan akkor legyen 1-es, ha az i^2-edik kettedesjegy változik.

Ha tehát megadunk legalább egy olyan x-et, amelyre az $S_k(x)$ sorozatnak nincs határértéke, akkor a g függvény (legalább) kontinuum számosságú helyen nincs értelmezve [0, 1]-ben. Egy megfelelő szám a következő: $x = 0{,}\,1001111000000001\ldots$, ahol rendre $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots$ darab 1-es, ill. 0 számjegy követi egymást felváltva. Könnyen látható, hogy minden k-ra

$$S_{4^k-1}(x) = \frac{1}{4^k-1}(1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2k-2}) = \frac{1}{3},$$

és

$$S_{2^{2k+1}}(x) = \frac{1}{2^{2k+1}-1}(1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2k}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{2k+2}-1}{2^{2k+1}-1} > \frac{2}{3},$$

tehát az $S_n(x)$ sorozatnak valóban nem létezik határértéke.

3. *Végezetül megmutatjuk, hogy $g(x)$ értéke 1 valószínűséggel $\frac{1}{2}$, azaz a $[0,1]$ intervallumból véletlenszerűen választott x helyen $g(x)$ értéke 0 valószínűséggel tér el $\frac{1}{2}$-től – ide számítva azt az esetet is, hogy $g(x)$ nem értelmezett.*

Jelöljük H-val azoknak a [0, 1]-beli számoknak a halmazát, amelyekben g nem értelmezett vagy az értéke nem $\frac{1}{2}$. Azt fogjuk megmutatni, hogy H *nullmértékű*, azaz tetszőleges pozitív ε esetén H lefedhető olyan intervallumokkal, amelyek összhosszúsága legfeljebb ε.

Nullmértékű például minden olyan halmaz, amelynek véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok pontja van. Ez a következőképpen látható be: Rendezzük sorba a halmaz elemeit, és a sorban az n-edik elemet fedjük le egy $\frac{\varepsilon}{2^n}$ hosszúságú intervallummal; ezzel a halmazt lefedjük egy legfeljebb $\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^t} = \varepsilon$ hosszúságú intervallumrendszerrel.

Megszámlálható sok nullmértékű halmaz egyesítése is nullmértékű. Ha ugyanis e halmazok $V_1,\ V_2,\ \ldots$, és $\varepsilon > 0$, akkor V_n-et $\frac{\varepsilon}{2^n}$ összhosszúságú intervallumrendszerrel lefedve, majd a lefedéseket egyesítve a $V_1,\ V_2,\ \ldots$, halmazok egyesítését lefedő, ε összhosszúságú intervallumrendszerhez jutunk.

Az iménti előkészületek után térjünk vissza H vizsgálatához; legyen ε egy (a továbbiak során rögzítettnek tekintett) pozitív szám. Jelölje H_ε azoknak a [0, 1]-beli x értékeknek a halmazát, melyekre az $\left|S_n(x) - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon$ egyenlőtlenség végtelen sok n-re teljesül. Ha n egy ilyen szám, akkor legyen k a legnagyobb olyan egész, amelyre $\frac{1}{2} - \frac{k}{n} > \varepsilon$. Ha $\left|S_n(x) - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon$, akkor x első n tizedesjegye között az 1-esek száma $0,\ 1,\ \ldots,\ k$, vagy $n,\ n-1,\ \ldots,\ n-k$ lehet. t darab 1-es esetén ugyanis $t < \frac{n}{2}$-re

$$\left|S_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - \frac{t}{n},$$

míg $t > \frac{n}{2}$-re $t = n - t'$ és

$$\left|S_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{t}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{t'}{n}.$$

A t darab 1-es $\binom{n}{t}$-féleképpen helyezkedhet el az első n számjegy között, és bármelyik ilyen elhelyezéshez tartozó x számok egy $\frac{1}{2^n}$ hosszúságú intervallumnak a pontjai. (Egy $x = 0,\ \alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\alpha_{n+1}\ \ldots$ tört ugyanis pontosan akkor ilyen, ha $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ éppen a kívánt elhelyezés, az $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots$ rész pedig tetszőleges, azaz $0,\ 0\ \ldots\ 0,\ \alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots$ a $\left[0,\ \frac{1}{2^n}\right]$ intervallum egyik pontja.) Az $\left|S_n(x)-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon$ feltételnek eleget tevő pontok tehát lefedhetők az

$$a_n=\frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}+\binom{n}{n-k}+\ldots+\binom{n}{n}\right]$$

összhosszúságú H_ε^n intervallumrendszerrel. Becsüljük meg a_n nagyságát! Ha $0<y<1$, akkor a binominális tétel értelmében

$$(1+y)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}y+\ldots+\binom{n}{k}y^k+\ldots+\binom{n}{n}y^n>$$
$$>\binom{n}{0}y^k+\binom{n}{1}y^k+\ldots+\binom{n}{k}y^k=2^{n-1}a_ny^k,$$

azaz

$$a_n<\frac{(1+y)^n}{2^{n-1}y^k}<\frac{(1+y)^n}{2^{n-1}y^{\frac{n}{2}-n\varepsilon}}=2\left(\frac{1+y}{2y^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right)^n=2\left(\frac{1}{2}\ y^{\varepsilon-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ y^{\varepsilon+\frac{1}{2}}\right)^n.$$

Az $r(y)=\frac{1}{2}\ y^{\varepsilon-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\ y^{\varepsilon+\frac{1}{2}}$ függvény deriváltja:

$$r'(y)=\frac{1}{2}\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)y^{\varepsilon-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\right)y^{\varepsilon-\frac{1}{2}}.$$

Mivel $r(1)=1$ és $r'(1)=\varepsilon>0$, ezért van olyan y_1 hely a $(0,\ 1)$ nyílt intervallumban, amelyre $r(y_1)<1$. Jelölje az $r(y_1)$ értéket v; ekkor

$$a_n<2v^n.$$

Legyen β tetszőleges pozitív szám, és válasszuk n-et olyan nagynak, amelyre már

$$0<2\frac{v^n}{1-v}<\beta$$

(ez megtehető, hiszen $0<v<1$). Ezzel az n-nel a $H_\varepsilon^n,\ H_\varepsilon^{n+1},\ \ldots$ intervallumrendszerek egyesítésének összhossza legfeljebb

$$a_n+a_{n+1}\ldots<2(v^n+v^{n+1}+\ldots)=\frac{2v^n}{1-v}<\beta.$$

A $H_\varepsilon^n, H_\varepsilon^{n+1},\ldots$ intervallumrendszerek egyesítése lefedi a H_ε halmazt. Ha ugyanis x a H_ε egyik pontja, akkor léteznie kell olyan, n-nél nem kisebb k értéknek, amelyre $\left|S_k(x)-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon$, hiszen ellenkező esetben x csak véges sok m-re elégíti ki az $\left|S_m(x)-\frac{1}{2}\right|>\varepsilon$ egyenlőtlenséget. H_ε tehát lefedhető egy legfeljebb β összhosszúságú intervallumrendszerrel; mivel β tetszőlegesen kicsi lehet, ezért H_ε nullmértékű halmaz. Ily módon pl. $H_{1/2^n}$ is nullmértékű, tehát a $H_{1/2},\ H_{1/2^2},\ H_{1/2^3},\ \ldots$ halmazok W egyesítése is nullmértékű. Végezetül megmutatjuk, hogy W lefedi H-t (ekkor persze $W=H$), így H is nullmértékű. Tegyük fel, hogy x a $H_{1/2^n}$ halmazok egyikében sincs benne. Ez azt jelenti, hogy mindegyik n természetes számra az $\left|S_k(x)-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2^n}$ egyenlőtlenség csak véges sok k-ra teljesül. Így minden n-re létezik olyan k_n, hogy valamennyi, k_n-nél nagyobb k egészre $\left|S_k(x)-\frac{1}{2}\right|\leqq\frac{1}{2^n}$, tehát

$$\lim_{k\to\infty}S_k(x)=\frac{1}{2},\quad \text{azaz}\quad g(x)=\frac{1}{2};$$

vagyis x nincs benne H-ban sem. Eszerint H része W-nek.