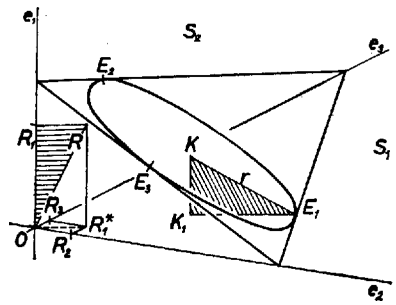
Jelöljük a körlemezt k-val, középpontját K-val, sugarát r-rel a szóban forgó szöglet csúcsát O-val, határoló síkjait rendre S_1-gyel, S_2-vel, S_3-mal, k síkját S-sel, k-nak S_i-n levő érintési pontját E_i-vel, K-nak S_i-n levő vetületét K_i-vel, az O-n átmenő, S_i-re merőleges egyenest e_i-vel ($i = 1, 2, 3$), és az O-n átmenő, S-re merőleges egyenest e-vel. Mérjünk fel O-ból e-re valamelyik irányban r-t, a kapott végpontot jelöljük R-rel. Fektessünk R-en át S_i-vel párhuzamos síkot, messe ez e_i-t R_i-ben ($i = 1, 2, 3$; lásd az 1. ábrát).



1. ábra

A következő megállapítások az $i = 1, 2, 3$ értékek mindegyikére érvényesek. Mivel k érinti az S_i síkot, S és S_i különbözőek, emiatt K_i különbözik K-tól és R_i különbözik R-től. Ha $S \perp S_i$, akkor K_i, azonos E_i-vel, és R_i azonos O-val. Különben a K, E_i, K_i és az R, O, R_i pontok valódi háromszögeket határoznak meg. Ezekben K_i-nél, illetve R_i-nél derékszög van, és az elsőnek E_i-nél levő szöge egyenlő a másodiknak O-nál levő szögével, hiszen e szögek szárai merőlegesek, és mindkét szög hegyesszög. Emiatt

$$(1) \qquad OR_i = E_iK_i \qquad \text{és} \qquad OR_i^2 + R_iR^2 = E_iK_i^2 + K_iK^2 = r^2.$$

Könnyen látható, hogy (1) az $S \perp S_i$, esetben is érvényes, hiszen ekkor $OR_i = E_iK_i = 0$.

Jelöljük R-nek S_1-en levő vetületét R_1^*-gal, ekkor

$$(2) \qquad OR^2 = OR_1^{*2} + R_1^*R^2 = OR_2^2 + OR_3^2 + OR_1^2.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$OK^2 = KK_1^2 + KK_2^2 + KK_3^2,$$

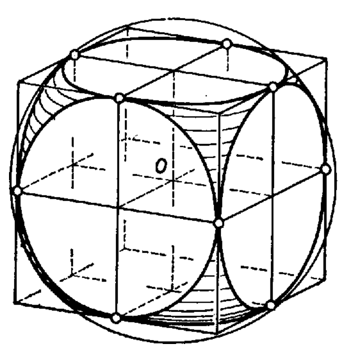
amiből (1) és (2) alapján

$$OK^2 = (r^2 - E_1K_1^2) + (r^2 - E_2K_2^2) + (r^2 - E_3K_3^2) =$$
$$= 3r^2 - (OR_1^2 + OR_2^2 + OR_3^2) = 3r^2 - OR^2 = 2r^2.$$

Ha tehát K a mértani helyhez tartozik, akkor

$$(3) \qquad OK^2 = 2r^2, \qquad 0 < KK_1, KK_2, KK_3 \le r.$$

Ezek szerint K rajta van az O középpontú, $\sqrt{2}\,r$ sugarú G gömbön, de az S_1, S_2, S_3 síkoktól mért távolsága nem lehet r-nél nagyobb. Az utóbbi feltétel arra az O centrumú, $2r$ élű **K** kocka pontjaira teljesül, amelynek lapjai rendre párhuzamosak S_i-vel, így a G-n levő pontok közül el kell hagynunk a **K**-n kívül levőket, valamint az S_i síkok pontjait. Jelöljük a visszamaradó pontok halmazát G_0-lal, megmutatjuk, hogy ennek minden pontja a vizsgált mértani helyhez tartozik (2. ábra).



2. ábra

Legyen K tetszőleges pont a térben, melyre teljesül (3), ahol K_i a K-nak az S_i-n levő vetülete ($i = 1, 2, 3$). Tekintsük az S_l, S_2, S_3 síkok által határolt 8 térrész közül azt a térnyolcadot, amelyik tartalmazza K-t. Mérjük fel az e_i egyenesre ebben a térnyolcadban az

$$OR_i = \sqrt{r^2 - K_iK^2}$$

szakaszokat, és húzzunk az R_i ponton át S_i-vel párhuzamos síkot ($i = 1, 2, 3$). Jelöljük a három új sík metszéspontját R-rel, erre (3) miatt

$$OR^2 = OR_1^2 + OR_2^2 + OR_3^2 = r^2,$$

tehát $$RR_1 = KK_1,\ RR_2 = KK_2,\ RR_3 = KK_3.$$

Fektessünk át K-n OR-re merőleges S síkot. A következő megállapításaink ismét érvényesek lesznek az $i = 1, 2, 3$ értékek mindegyikére. Mivel $KK_i > 0$, és $OR_i < r$, vagyis R_i különbözik R-től, tehát S nem lehet párhuzamos S_i-vel. Jelöljük S és S_i metszésvonalát m_i-vel, K-nak m_i-n levő merőleges vetületét E_i-vel. Mivel $OR \perp KE_i$, és $RR_i = KK_i$, azért az ORR_i, E_iKK_i háromszögek ismét egybevágóak (esetleg bennük egyszerre O az R_i-vel, E_i a K_i-vel azonos), tehát

$$KE_i = OR = r,$$

vagyis az S síkban K körül r sugárral rajzolt k kör érinti az m egyenest. K tehát valóban a mértani helyhez tartozik.

Megjegyzés. Megoldásunk második felében elég volt k-nak egy megfelelő állását megtalálnunk. Hogy ennek megfelelően csak egyet adtunk meg, az még nem jelenti azt, hogy csak egy van. Általában a megfelelő körök száma négy, kivéve, ha K a **K** kocka, felületén van, ekkor a helyzetek száma csak kettő.