I. megoldás. 1. A PP' egyenes iránytangense az adott összefüggések felhasználásával

$$m=\frac{b'-b}{a'-a}=\frac{0{,}8a-1{,}6b}{-0{,}4a+0{,}8b}=-\frac{0{,}8}{0{,}4}\cdot\frac{a-2b}{a-2b}=-2,$$

állandó, hacsak a nevezőre teljesül

$$a'-a=-0{,}4(a-2b)\neq 0.$$

Ez a követelmény első alakjában azt jelenti, hogy P' és P abszcisszái különbözők, második alakjában pedig azt, hogy $a-2b\neq 0$, másképpen $a\neq 2b$, vagyis P abszcisszája és ordinátája közt kizártunk egy első fokú kapcsolatot. Általában az $x=2y$, vagy $y=\frac{1}{2}x$ kapcsolat a koordináta-rendszerben egy meghatározott t egyenest jelent, azt kaptuk tehát, hogy ha P nincs rajta t-n, akkor PP' iránytényezője 2.

Ha viszont $a'-a=0$, azaz $a'=a$ és $a=2b$, vagyis P rajta van t-n, akkor (1) alapján

$$b'=1{,}6b-0{,}6b=b,$$

vagyis P' azonos P-vel, hiszen mindkét koordinátájuk egyenlő. Ekkor pedig nincs értelme beszélni összekötő egyenesükről.

Ezek szerint a P,P' kapcsolatban – nevezhetjük ponttranszformációnak – valóban minden $P'\neq P$ esetén a PP' egyenes párhuzamos az $m=-2$ iránytényezőjű egyenesek mindegyikével, speciálisan az origón átmenő, $y=-2x$ egyenletű i egyenessel; az állítást bebizonyítottuk.

Például az $(1;0)$ pont leszármazottja $(0{,}6;\,0{,}8)$, a $(0;1)$ ponté $(0{,}8;-0{,}6)$, a $(3;4)$-é $(5;0)$.

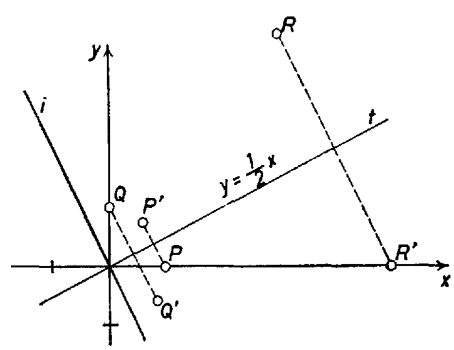
Azt is kaptuk, hogy az (1) egyenletrendszerrel leírt transzformációban az $y=\frac{1}{2}x$ egyenletű t egyenes pontjai – és csak ezek – megkülönböztetett szerepet játszanak (hiszen más pontpárokra mindjárt $a'\neq a$), ezek önmaguk leszármazottai.

2. Keressük meg most a P-ből leszármaztatott P'-nek P'' leszármazottját, P-nek második leszármazottját (a t-n levő P pont esetében $P'\equiv P$ miatt természetesen $P''\equiv P$).
Erre

$$a''=0{,}6a'+0{,}8b'=0{,}6(0{,}6a+0{,}8b)+0{,}8(0{,}8a-0{,}6b)=a,$$

és hasonlóan $b''=b$, vagyis P' leszármazottja maga P.

Hozzávéve ehhez azt az észrevételt, hogy t merőleges i-re, vagyis minden P,P' pontpár összekötő egyenesére, kézenfekvő az a sejtés, hogy az (1) rendszer az $y=\frac{1}{2}x$ egyenesre való tükrözés.



Ennek bizonyításához most már elég azt belátni, hogy a PP' szakasz felezőpontja a t-n van, vagyis hogy ordinátája feleakkora, mint az abszcisszája. Valóban:

$$\frac{a+a'}{2}=0{,}8a+0{,}4b,$$
$$\frac{b+b'}{2}=0{,}4a+0{,}2b,$$

tehát sejtésünk igaz.

II. megoldás. Jelöljük a síknak a koordinátatengelyek pozitív irányába mutató egységvektorait $\mathbf{i}$-vel, $\mathbf{j}$-vel, az origót O-val, akkor a P pont helyvektora

$$\mathbf{r}=\overrightarrow{OP}=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j},$$

és a P-hez rendelt P' pont helyvektora

$$\mathbf{r}'=\overrightarrow{OP'}=a'\,\mathbf{i}+b'\,\mathbf{j}=(0{,}6a+0{,}8b)\,\mathbf{i}+(0{,}8a-0{,}6b)\,\mathbf{j}=a(0{,}6\,\mathbf{i}+0{,}8\,\mathbf{j})+b(0{,}8\,\mathbf{i}-0{,}6\,\mathbf{j}).$$

Ebből $a=1$, $b=0$, illetve $a=0$, $b=1$ helyettesítéssel kapjuk az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ vektorok transzformált értékeit:

(2)
$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= 0{,}6\,\mathbf{i} + 0{,}8\,\mathbf{j} \\ \mathbf{j}' &= 0{,}8\,\mathbf{i} - 0{,}6\,\mathbf{j}, \end{aligned}$$

Ezeket az $\mathbf{r}'$ előállításába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}' = a\,\mathbf{i}' + b\,\mathbf{j}'.$$

Szavakkal elmondva ez azt jelenti, hogy a transzformált P' pontnak a transzformált $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ vektorok által meghatározott koordináta-rendszerben ugyanazok a koordinátái, mint az eredeti P pontnak az eredeti koordináta-rendszerben. Elég tehát azt megvizsgálnunk, hogyan kaphatjuk meg az $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ vektorokat az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ vektorokból. Mivel a (2)-beli együtthatókra

$$0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 1,$$

azért $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ is egységvektor. Másrészt $\mathbf{j}'$ az $\mathbf{i}'$-ből negatív irányú $90°$-os forgatással kapható meg, hiszen ez a forgatás $(0{,}6\,\mathbf{i})$-t $(-0{,}6\,\mathbf{j})$-be, $(0{,}8\,\mathbf{j})$-t $(0{,}8\,\mathbf{i})$-be viszi, és e két vektor összegét az új vektorok összegébe viszi. Ha tehát megkeressük azt a t egyenest, amelyre $\mathbf{i}$-t tükrözve $\mathbf{i}'$-t kapjuk, biztosak lehetünk benne, hogy az $\mathbf{i}$-ből pozitív irányú $90°$-os forgatással kapható $\mathbf{j}$-t erre a t-re tükrözve az $\mathbf{i}'$-ből negatív irányú $90°$-os forgatással kapható $\mathbf{j}'$-t kapjuk.

Mivel $\mathbf{i}'$ is egységvektor, t valóban létezik, mégpedig t az $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}'$ vektorok által kijelölt szöget felező egyenes. A t-re való tükrözés az $\mathbf{i}$ vektor $a\mathbf{i}$ skalár-szorosát az $\mathbf{i}$-nek $\mathbf{i}'$ képéből kapható $a\mathbf{i}'$ vektorba viszi, $b\mathbf{j}$-t pedig $b\mathbf{j}'$-be, és $(a\mathbf{i}+b\mathbf{j})$-t $(a\mathbf{i}' + b\mathbf{j}')$-be, hiszen a vektorok összeadásához használt paralelogramma is tükröződik t-re. Ezzel beláttuk, hogy az (1) összefüggéssel megadott ponttranszformáció azonos a t egyenesre való tükrözéssel, ahol t az origón, és az $(1;\,0)$, $(0{,}6;\,0{,}8)$ pontpár $(0{,}8;\,0{,}4)$ felezőpontján átmenő

$$y = \frac{1}{2}\,x$$

egyenletű egyenes.

Megjegyzés. Ha (1) helyett az általános

$$a' = c_{11}a + c_{12}b; \qquad b' = c_{21}a + c_{22}b$$

összefüggésből indultunk volna ki, az

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= c_{11}\,\mathbf{i} + c_{21}\,\mathbf{j}, \\ \mathbf{j}' &= c_{12}\,\mathbf{i} + c_{22}\,\mathbf{j} \end{aligned}$$

vektorokat kaptuk volna, amelyek általában már nem merőlegesek, és nem egységvektorok. Az azonban továbbra is igaz marad, hogy tetszőleges $(\mathbf{i};\mathbf{j})$-beli pont képe a vele megegyező koordinátájú, $(\mathbf{i}';\mathbf{j}')$-beli pont. A transzformációnk által adott képek tehát úgy viszonylanak az eredetihez, mint egy bizonyos összefüggésnek különböző koordináta-rendszerekben kapott képei.

Mondjuk, az $y = x^2$ összefüggést ábrázoljuk különböző koordináta-rendszerekben, azaz tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorok mellett megkeressük az

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{u} + x^2\,\mathbf{v}$$

helyvektorú pontok összeségét, midőn x befutja a valós számokat. Amíg az $(\mathbf{u};\mathbf{v})$ vektorok merőlegesek, és egységnyi hosszúak, megválasztásuk nem szól bele a kapott pontokból kirajzolódó görbe alakjába. Ha azonban $(\mathbf{u};\mathbf{v})$ tetszőleges vektorok, a vizsgált görbék alakja is megváltozik.

További általánosítást jelent, ha az origó helyzetét is megváltoztatjuk, amit az

$$\begin{aligned} a' &= c_{11}a + c_{12}b + c_{13} \\ b' &= c_{21}a + c_{22}b + c_{23} \end{aligned}$$

transzformációval érhetünk el. Jó szolgálatot tesznek ezek a transzformációk a bonyolultabb függvények alaki vizsgálatánál, segítségükkel ezeknek a tipizálása aránylag kényelmesen elvégezhető.

Külön említésre méltóak az

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

egyenletű ún. másodrendű görbék, amelyekről e transzformációk segítségével lehet belátni, hogy valamennyiük kúpszelet, tehát a fenti egyenlet képe vagy ellipszis, vagy hiperbola, vagy parabola, vagy metsző egyenespár, vagy párhuzamos egyenespár, vagy egy egyenes, vagy egy pont, vagy üres halmaz (a kört e fölsorolásban az ellipszisekhez soroltuk).