1. feladat. *Tekintsünk két folyadékot, A-t és B-t, amelyek nem oldódnak egymásban. E folyadékok telített gőzeinek nyomása p_i, ($i = A$ vagy B) jó közelítésben a következő képletből számolható:*

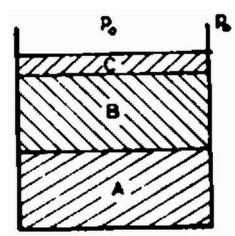
$$\ln \frac{p_i}{p_0} = \frac{a_i}{T} + b_i, \quad (i = A, B),$$

ahol p_0 a normál nyomást jelöli, T a gőz abszolút hőmérséklete, továbbá a_i és b_i, ($i = A$ vagy B) a folyadékokra jellemző állandók (ln a természetes logaritmust jelöli, amelynek alapszáma $e = 2{,}7183$).

A p_i/p_0 arány értékei az A és a B folyadékokra, 40 °C és 90 °C hőmérsékleten az alábbi táblázatban vannak megadva:

t (°C)	p_i/p_0	
	$i = A$	$i = B$
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

Ezen értékek hibái elhanyagolhatóak.



1. ábra

a) *Határozd meg az A és B folyadékok forrási hőmérsékleteit a p_0 nyomáson!*

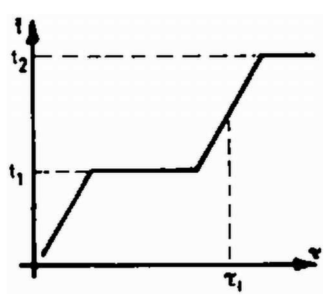
b) *Az A és B folyadékokat egy edénybe öntöttük, amelyben az 1. ábra szerinti rétegek alakultak ki. Azért, hogy a szabad párolgást a B folyadék felszínéről megakadályozzuk, a B folyadék felületét egy nem párolgó C folyadékkal fedtük be, amely nem oldódik sem A, sem B folyadékokban, és azok sem oldódnak benne. Az A és B folyadékok molekuláinak tömegaránya (gáz állapotban):*

$$\gamma = \mu_A/\mu_B = 8.$$

Az A és B folyadékok tömege kezdetben egyforma, $m = 100$ g. A rétegek vastagsága és a folyadékok sűrűsége olyan, hogy feltehetjük: az edényben a nyomás gyakorlatilag mindenhol megegyezik a külső légnyomással.

Ezekután lassan, folyamatosan és egyenletesen melegíteni kezdjük a folyadékrendszert.

Azt találjuk, hogy a folyadék t hőmérséklete a τ idő függvényében a 2. ábrán vázolt módon változik.



2. ábra

Határozd meg az ábra vízszintes szakaszainak megfelelő t_1, és t_2 hőmérsékleteket! Számítsd ki az A és a B folyadék tömegét az ábrán látható valamely τ_1 időpillanatban! A t_1 és t_2 hőmérsékletet kerekítsd egész (Celsius) fokra, a folyadék tömegét pedig tizedgramm pontossággal add meg!

MEGJEGYZÉS: Feltesszük, hogy a vizsgált folyadékok gőzei jó közelítéssel

I) *eleget tesznek a Dalton-törvénynek, azaz a gázok keverékeinek nyomása egyenlő a gázkeveréket alkotó gázok parciális nyomásainak összegével,*

II) *egészen a telített gőznek megfelelő nyomásig ideális gáznak tekinthetők.*

Megoldás. 1.a) Először határozzuk meg az a_1 és b_1 állandókat! Helyettesítsük a táblázatban megadott számadatokat az

$$\ln(p_i/p_0) = a_i/T + b_i, \quad (i = A \text{ vagy } B)$$

egyenletbe! Ekkor mindkét folyadékra egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldása:

$$a_A = -3748{,}5 \text{ K}, \quad b_A = 10{,}711, \quad a_B = -5121{,}6 \text{ K}, \quad b_B = 13{,}735.$$

Egy folyadék akkor forr, ha telített gőzének nyomása megegyezik a külső légnyomással. A feladat jelöléseivel ekkor $p_i/p_0 = 1$, tehát $T_{fi} = -a_i/b_i$, ahol T_f a forrási hőmérsékletet jelöli. Adatainkkal $T_{fA} = 345$ K $= 77$ °C, $T_{fB} = 373$ K $= 100$ °C.

1.b) A hőmérséklet–idő grafikon kezdeti szakasza arra utal, hogy az edényben a folyadék kezdetben párolgás nélkül melegszik, majd t_1 hőmérsékleten forrni kezd. A forrás azt jelenti, hogy a folyadék belsejében telített gőzt tartalmazó buborék jön létre, amelyben a gáz nyomásának legalább akkorának kell lennie, mint a külső nyomás. Melyik az a legalacsonyabb hőmérséklet, amelyen ez létrejöhet? Az A és B folyadékok határfelületén keletkező buborékban mindkét folyadék telített gőze jelen lehet, és így a nyomás a két telített gőz nyomásának az összege. Ez a nyomás már az egyes folyadékok forrási hőmérsékleténél kisebb hőmérsékleten is eléri a külső légnyomást. A t_1 hőmérsékleten tehát a $p_A + p_B = p_0$ összefüggés teljesül. A feladatban megadott egyenletből a nyomást kifejezve és a fenti összefüggésbe írva az

$$e^{\frac{a_A}{T_1}+b_A} + e^{\frac{a_B}{T_1}+b_B} = 1$$

egyenletet kapjuk. Ezt legegyszerűbben a számadatok behelyettesítésével és T_1 értékének többszöri változtatásával oldhatjuk meg. Az egész fokra kerekített eredmény $T_1 = 340$ K, azaz $t_1 = 67$ °C. A forrás az A és B folyadék határán tehát már ezen a hőmérsékleten megindul. Egy ilyen buborékban a telített gőzök nyomását ismét a feladatban megadott egyenlet segítségével számíthatjuk: $p_A = 0{,}734\, p_0$, és $p_B = 0{,}267\, p_0$. Most már meghatározhatjuk az egyes folyadékok gőzének tömegarányát a buborékban: $m_A/m_B = (p_A/p_B) \cdot (\mu_A/\mu_B) = 22{,}0$. (Ez az arány a buborék felszállása során nem változik.) Tehát a határfelületi forrás során az A folyadék 22-szer gyorsabban fogy. Ez a forrás addig tart, míg az A folyadék teljesen el nem fogy, és ekkor a B folyadékból még 100 g $-$ (100/22) g $=$ 95,5 g marad. Ennyi tehát a B folyadék tömege a τ_1 pontban, amikor a forrás befejeztével a hőmérséklet ismét emelkedik. A forrás ezután már csak a B folyadék forráspontján indul el ismét, tehát $t_2 = 100$ °C.

2. feladat. *Három – nem egy egyenesbe eső – pontban (P_1, P_2, P_3-ban) adott m_1, m_2 és m_3 tömegű pontszerű testek találhatók, amelyek közti kölcsönhatás egyedül a gravitációs erőkből származik; más testekkel nem állnak kölcsönhatásban.*

Jelöljük a három tömegpontból álló rendszer tömegközéppontján átmenő és a $P_1P_2P_3$ háromszög síkjára merőleges tengelyt σ-val. Milyen feltételnek kell fennállni a $\overline{P_1P_2} = d_{12}$, $\overline{P_2P_3} = d_{23}$ és $\overline{P_1P_3} = d_{13}$ távolságok között, valamint e távolságok és a rendszer (σ tengelyre vonatkoztatott) ω szögsebessége között, hogy a $P_1P_2P_3$ háromszög alakja a rendszer mozgása során változatlan maradjon, vagyis milyen feltételek teljesülése esetén forog a rendszer a σ tengely körül merev testként?

Megoldás. Jelöljük az egyes tömegpontok helyvektorát $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ és $\mathbf{r}_3$-mal. Célszerű a koordinátarendszer origóját a tömegközéppontba választani, ekkor fennáll az

$$m_1 \cdot \mathbf{r}_1 + m_2 \cdot \mathbf{r}_2 + m_3 \cdot \mathbf{r}_3 = 0 \tag{1}$$

vektoregyenlőség.

Írjuk fel az m_1 tömegű test mozgásegyenletét:

$$-m_1\mathbf{r}_1 \cdot \omega^2 = \frac{f \cdot m_1 m_2}{d_{12}^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{f \cdot m_1 m_3}{d_{13}^2}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1), \tag{2}$$

ahol f a Newton-féle gravitációs állandó. Az (1) egyenletből $\mathbf{r}_3$-at kifejezve és (2)-be helyettesítve az

$$\mathbf{r}_1 \left(\frac{\omega^2}{f} - \frac{m_1 + m_3}{d_{13}^3} - \frac{m_2}{d_{12}^3} \right) = \mathbf{r}_2 \left(\frac{1}{d_{13}^3} - \frac{1}{d_{12}^3} \right) \cdot m_2 \tag{3}$$

összefüggést kapjuk. Mivel $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ különböző irányú vektorok, (3) jobb és bal oldala csak úgy lehet mégis egyenlő, hogy a zárójelben lévő kifejezések nullák. Innen

$$d_{12} = d_{13} \quad \text{és} \quad \omega^2 \cdot d_{12}^3 = f(m_1 + m_2 + m_3)$$

adódik. A másik két test hasonló (az indexek felcserélésével adódó) mozgásegyenletét is felírva végül a keresett feltételek:

(I) $\quad d_{12} = d_{23} = d_{13} = d \qquad$ és
(II) $\quad \omega^2 \cdot d^3 = f \cdot M,$
ahol $M = m_1 + m_2 + m_3$, a rendszer össztömege.

3. feladat. *Ebben a feladatban annak a lehetőségét és következményeit vizsgáljuk, hogy miként lehet egy elektronmikroszkópot (amely $U = 511$ kV potenciálkülönbséggel felgyorsított elektronnyaláb mágneses eltérítésével működik) protonmikroszkóppá alakítani, amelyben a protonnyalábot $-U$ potenciálkülönbséggel gyorsítjuk fel.*

Oldd meg az alábbi két részfeladatot:

a) *Az elektron, miután U potenciálkülönbséggel felgyorsították, elhagyja a gyorsítót, és egy inhomogén $\mathbf{B}$ mágneses térbe jut. Ezt a mágneses mezőt a T_1, T_2, ..., T_n jelzésű rögzített tekercsekből álló rendszer hozza létre. A tekercsekben i_1, i_2, ..., i_n erősségű egyenáram folyik. A tekercsek által létrehozott erőtérben az elektronok egy bizonyos P pályagörbén mozognak.*

Mekkora i_1^*, i_2^*, ..., i_n^* erősségű áramoknak kell a T_1, T_2, ..., T_n tekercseken folyni, hogy egy $-U$ potenciálkülönbséggel felgyorsított proton ugyanazon a P pályagörbén (és ugyanabban az irányban) mozogjon a mágneses térben, mint az előbb az elektron?

ÚTMUTATÁS: A feladatot úgy oldhatod meg, hogy megkeresed azt a feltételt, amely mellett a P pályagörbét meghatározó egyenlet mindkét esetben ugyanaz. Felhasználhatod az alábbi összefüggést:

$$\mathbf{p} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}(\mathbf{p}^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}t}.$$

b) *Hányszorosára nőne vagy csökkenne az adott mikroszkóp felbontóképessége, ha az elektronnyalábot protonnyalábbal helyettesítenénk? Feltételezzük, hogy a mikroszkóp felbontóképessége (vagyis az a legkisebb távolság két tárgypont között, amelyeknek kör alakú képei még elkülönülten láthatók) csak a részecskék hullámtulajdonságától függ.*

Feltételezzük, hogy az elektronok, illetve a protonok sebessége a gyorsításuk előtt nulla. Az egyszerűség kedvéért felteszzük továbbá, hogy az elektronok és protonok saját mágneses momentumának a mágneses mezővel való kölcsönhatása elhanyagolható, és hogy a mozgó részecskék által kibocsátott elektromágneses sugárzás is elhanyagolható.

MEGJEGYZÉS: Fizikusok gyakran használják az energia egységeként az 1 *elektronvoltot* (1 eV), *és ennek többszöröseit, mint pl.* 1 keV, 1 MeV. 1 *elektronvolt energiára tesz szert az az elektron, amely* 1 V *potenciálkülönbségen halad át.*

A számításnál használd fel a következő számadatokat:
az elektron nyugalmi energiája: $E_e = m_e c^2 = 511$ keV,
a proton nyugalmi energiája: $E_p = m_p c^2 = 938$ MeV.

Megoldás. a) Mivel a felgyorsított elektron mozgási energiája összemérhető (éppen egyenlő) a nyugalmi energiával, a relativisztikus

(1) $$\frac{d\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_L.$$

mozgásegyenletet kell alkalmaznunk. Ebben

(2) $$\mathbf{p} = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\mathbf{v}$$

az m_e nyugalmi tömegű, v sebességű elektron impulzusa,

(3) $$\mathbf{F}_L = e_e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

pedig az e töltésű elektronra ható Lorentz-erő. Mivel ez az erő merőleges a sebességre (és emiatt az impulzusra is), a megadott matematikai összefüggést felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{p}^2}{dt} = 2 \cdot \mathbf{p}\frac{d\mathbf{p}}{dt} \sim \mathbf{p} \cdot \mathbf{F}_L = 0.$$

Az impulzus vektorának *nagysága* tehát a mágneses mezőben történő mozgás során állandó. Hasonlóan nem változik a sebesség nagysága sem, emiatt az (1) mozgásegyenlet az

(4) $$\frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e_e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

alakot ölti. Mivel a pályagörbe bármelyik *kicsiny* darabja közelíthető egy R sugarú körívvel (R a görbületi sugár), s az egyenletes körmozgás gyorsulása

$$\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = \frac{v^2}{R},$$

a (4) mozgásegyenlet mindkét oldalának abszolútértékét képezve

$$\frac{m_e}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{v^2}{R} = e_e \cdot v \cdot B \cdot \sin\ \alpha$$

adódik (α a sebesség és a mágneses indukció vektorának szöge, ez általában a pályagörbe mentén helyről helyre változik.) Azt kaptuk tehát, hogy

$$\frac{p}{e_e \cdot B} = R \cdot \sin\ \alpha.$$

A fenti összefüggés jobb oldalán csak a pályagörbére jellemző mennyiségek szerepelnek, ha tehát azt akarjuk, hogy egy $e_p = -e_e$ töltésű, p^* impulzusú proton valamilyen $\mathbf{B}^*$ mágneses térben ugyanazt a pályagörbét fussa be, mint az eddig vizsgált elektron, akkor a

$$\mathbf{B}^* = -\frac{p^*}{p} \cdot \mathbf{B}$$

feltétel teljesülését kell (a pályagörbe minden pontjában) biztosítanunk. De mivel a mágneses indukció arányos a tekercsekben folyó áramokkal, a keresett feltétel

$$i_k^* = -\frac{p^*}{p} i_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Az elektronok, illetve a protonok impulzusát a gyorsítófeszültségből számíthatjuk ki. A relativisztikus energiaképlet szerint

$$\frac{m_e \cdot c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_e c^2 + |e \cdot U| \quad (= 2 \cdot m_e c^2),$$

ahonnan $v = (\sqrt{3}/2) \cdot c$, illetve $p = \sqrt{3} \cdot m_e \cdot c$ adódik. A protonok sebességét és impulzusát a klasszikus mechanikai összefüggésből számíthatjuk, hiszen a proton tömege sokkal nagyobb, mint az elektroné, s emiatt (ugyanakkora gyorsítófeszültség hatására) sokkal kisebb sebességre gyorsulnak csak fel.

$$m_p \frac{v^{*2}}{2} = \frac{p^{*2}}{2m_p} = |e_p \cdot U| = 511\ \text{keV} \approx m_e \cdot c^2,$$

innen

$$p^* = \sqrt{2m_e \cdot m_p} \cdot c,$$

s végül az impulzusok nagyságának aránya

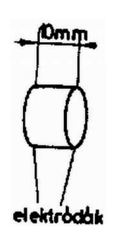
$$\frac{p^*}{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{938\ \text{MeV}}{0{,}511\ \text{MeV}}} \approx 35{,}0.$$

Az eltérítő tekercsek áramát tehát az $i^* = -35{,}0i$ összefüggés szerint kell módosítanunk, ha elektronok helyett protonnyalábot akarunk fókuszálni.

b) A mikroszkóp felbontóképessége a részecskék Broglie-hullámhosszával, az pedig az impulzus reciprokával arányos. Az előző számítás szerint a protonok impulzusa kb. 35-ször nagyobb, mint az elektronoké, a szóban forgó protonmikroszkóppal tehát akár 35-ször kisebb tárgyakat is megfigyelhetünk, mint az eredeti elektronmikroszkóppal.

4. feladat (mérési feladat.) *Adott az alábbi felszerelés:*

1. *Két, egyenként* 10 mm *vastag piezoelektromos korong, amelyeknek oldallapjaira elektródákat párologtattak (lásd a 3. ábrát). Ezek egy tolómérő száraira vannak erősítve.*
2. *Hitelesített szinuszjel-generátor.*
3. *Két bemenetű (kétcsatornás) oszcilloszkóp.*
4. *Két, folyadékot tartalmazó, zárt műanyag zacskó.*
5. *Egy pohárban glicerin, amely arra való, hogy a piezoelektromos korong lapjait ezzel bekenve jobb mechanikai csatlakozás jöjjön létre.*
6. *Kábelek és egy elosztó.*
7. *A folyadékkal telt zacskók rögzítésére szolgáló állvány.*
8. *Tolómérőtartó.*



3. ábra

Elektromos mező hatására a piezoelektromos anyagok megváltoztatják hosszméretüket, és viszont: deformációk hatására a piezoelektromos anyagban elektromos mező jön létre. Ezért egy piezoelektromos anyagban váltakozó elektromos mező segítségével mechanikai rezgéseket lehet kelteni, vagy mechanikai rezgésekkel váltakozó elektromos tér hozható létre.

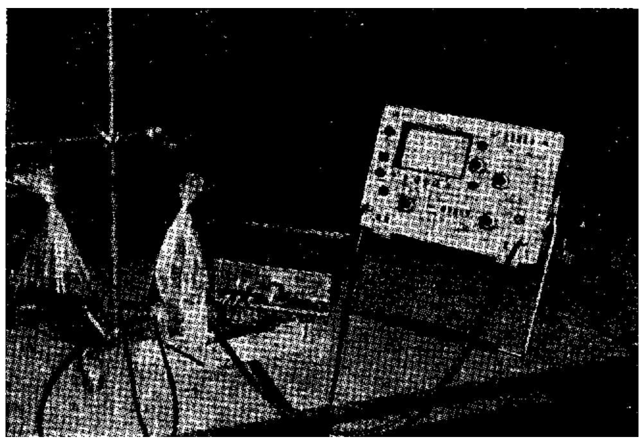
a) *Annak ismeretében, hogy a longitudinális ultrahang sebessége a korong anyagában kb.* 4000 m/s, *adjál durva becslést a korong szimmetriatengelyével párhuzamos mechanikai rezgések rezonanciafrekvenciájára. Feltételezzük, hogy a korong rögzítése nem befolyásolja a rezgéseket. (Megjegyezzük, hogy másfajta rezgések is létrejöhetnek a korongban, az előbbinél alacsonyabb, illetve magasabb frekvenciákkal.)*

Előző becslésedből kiindulva határozd meg méréssel azt a frekvenciát, amelynél a piezoelektromos korongok a lehető legjobban működnek ultrahangot kibocsátó és (a folyadékon áthaladt ultrahangot) érzékelő rendszerként. Ha glicerinnel kenjük be a korongok felületét, mielőtt hozzányomjuk őket a műanyag zacskóhoz, ez javítja az ultrahang áthaladását.

b) *Határozd meg az ultrahang sebességét mindkét folyadékban a zacskók kinyitása nélkül, és végezz hibabecslést!*

c) *Számold ki a két folyadékban megmért sebességek arányát, és gondosan add meg ennek is a hibáját!*

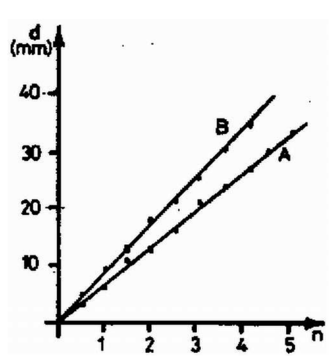
Megoldás. a) A piezokristályban az alkotóval párhuzamosan terjedő rezgésekre a korong lapjai szabad végként viselkednek. A legalacsonyabb rezonancia frekvencia esetén $h = \lambda_p/2 = v_p/(2f)$, ahol h a korong magassága, λ_p, v_p és f pedig az ultrahang hullámhossza, sebessége és frekvenciája a piezokristályban. A keresett frekvenciára számadatainkkal $f = 2 \cdot 10^5$ Hz adódik. Ez az érték csak egy becslés, hiszen a korong átmérője nem sokkal nagyobb a magasságánál, és ez befolyásolhatja a rezgést.



4. ábra

A mérési elrendezést a 4. ábra mutatja. A szinuszjel-generátor egyrészt az egyik piezo korongra van kötve (ez bocsátja ki az ultrahangot), másrészt az oszciloszkóp egyik bemenetére. A másik piezo korong, amely mikrofonként működik, az oszcilloszkóp másik bemenetére van kötve. Mindkét korong kissé hozzá van nyomva az egyik folyadékot tartalmazó zacskóhoz. A frevenciát a 100–1000 kHz tartományban lassan változtatva a felfogott jel amplitúdója egy éles csúcsot mutat az $f = 215$ kHz frekvencián. Ezt a frekvenciát a legpontosabban (3 kHz pontossággal) úgy határozhatjuk meg, hogy az oszcilloszkóp ernyőjéről leolvassuk néhány periódus hosszát.

b) Ha a tolómérő segítségével változtatjuk a két piezo korong távolságát, akkor változik az az út, amit az ultrahang a folyadékban megtesz, és így az oszcilloszkópra érkező két szinuszjel fáziskülönbsége. A tolómérő nyílását változtatva az elmozdulást (d) minden olyan pontban leolvassuk, ahol a két jel azonos fázisban érkezik az oszcilloszkópra. Ábrázolva az n hullámhossznyi elmozdulásnál leolvasott d_n értékeket, a kapott pontok közelítőleg egy egyenesre illeszkednek (5. ábra). Az egyenes meredeksége éppen a hullámhosszt adja, amelyre $\lambda_A = 7{,}010 \pm 0{,}035$ mm és $\lambda_B = 8{,}950 \pm 0{,}045$ mm adódik. Az ultrahang sebessége a folyadékban $v = \lambda f$, adatainkkal $v_A = 1508 \pm 30$ m/s, $v_B = 1923 \pm 38$ m/s.



5. ábra

c) A két sebesség aránya $v_B/v_A = \lambda_B/\lambda_A = 1{,}276 \pm 0{,}013$, itt a frekvenciamérés pontatlansága nem játszik szerepet.