Jelöljük a_n, b_n mértani közepét c_n-nel. (1) szerint

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \cdot \frac{a_n+b_n}{2} = a_nb_n,$$

tehát $c_{n+1} = c_n$, amiből következik, hogy a c_n sorozat tagjai mind egyenlőek a sorozat első tagjával, c_0-lal:

$$a_nb_n = c_0^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

Ugyancsak (1)-ből kapjuk, hogy

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \frac{(b_n-a_n)^2}{2(b_n+a_n)}, \tag{3}$$

amiből először is az következik, hogy $b_{n+1} \geq a_{n+1}$, és mivel már tudjuk, hogy e két szám mértani közepe c_0, az is igaz, hogy

$$a_{n+1} \leq c_0 \leq b_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4}$$

Már tudjuk, hogy $n = 1$-től kezdve a $d_n = b_n - a_n$ különbség nem-negatív ($n = 0$ mellett még előfordulhat, hogy $a_0 > b_0$). (3) szerint

$$d_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|b_n - a_n|}{b_n + a_n} \cdot |b_n - a_n| \leq \frac{1}{2}\,|d_n|. \tag{5}$$

Ebből n szerinti teljes indukcióval kapjuk, hogy

$$d_n \leq \frac{1}{2^n}|d_0|; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

Valóban, (6) $n = 0$ mellett triviálisan igaz, és ha már beláttuk (6)-ot valamilyen n-re, akkor (5) alapján (6) $(n+1)$-re is igaz. Mivel a d_n, sorozat tagjai $n \geq 1$ mellett nem-negatívak, (6)-ból következik, hogy a határértékük 0. (4) szerint

$$\begin{aligned} 0 \leq c_0 - a_{n+1} \leq d_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 \leq b_{n+1} - c_0 \leq d_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

tehát a $c_0 - a_n$ és $b_n - c_0$ sorozatok határértéke is 0, ami épp azt jelenti, hogy az a_n, b_n sorozatok határértéke c_0. Ezt kellett bizonyítanunk.

2. Mielőtt a mondott numerikus példára rátérnénk, jegyezzük meg, hogy (1) és (4) alapján könnyen igazolható, hogy a b_n sorozat monoton fogy, és a_n monoton nő. Ebből és (3)-ból következik, hogy

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{4b_{n+1}} \leq \frac{(b_n - a_n)^2}{4a_0}. \tag{7}$$

Válasszunk tehát a_0-nak és b_0-nak olyan értékeket, hogy $a_0b_0 = 21$, és $|b_0 - a_0|$ lehetőleg kicsi legyen. Ilyen például az

$$a_0 = 4{,}2; \quad b_0 = 5$$

számpár. Erre (7) alapján

$$b_1 - a_1 \leq \frac{0{,}8^2}{16} = 0{,}04, \quad b_2 - a_2 \leq \frac{0{,}04^2}{16} = 0{,}0001,$$

elég tehát b_2-t meghatározni.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4{,}2+5}{2} = 4{,}6; \quad a_1 = \frac{21}{4{,}6} = \frac{105}{23}; \\ b_2 &= \frac{52{,}5+52{,}9}{23} = \frac{105{,}4}{23} = 4{,}58261, \end{aligned}$$

így $a_2 > 4{,}5825$, és három tizedes jegyre $\sqrt{21} = 4{,}583$.