I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Egy tompaszögű háromszög oldalainak hosszai egész számok és szorzatuk 225. Mekkorák a háromszög oldalai?

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely x számnak a legközelebbi egész számtól való távolsága $\frac{1}{2} - \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$. (Ahol $\{x\}$ jelenti a szám törtrészét, azaz $\{x\} = x - k$, ahol k a legnagyobb olyan egész, mely x-nél nem nagyobb.)

3. Bizonyítsuk be, hogy egy r sugarú körbe írt szabályos tizenkétszög átdarabolható olyan téglalapba, melynek oldalai r és $3r$.

4. Az 1989 számot különböző természetes számokból akarjuk előállítani, az összeadás és kivonás műveletek kizárólagos alkalmazásával. (Tehát semmilyen más művelet nem alkalmazható, ezeket viszont akárhányszor igénybe vehetjük.) Hány olyan előállítás van, melyben a felhasznált számok számjegyei a 2, 3, 4, 5, 6, 0 számjegyek közül kerülnek ki, és mind a hat számjegy az előállításban pontosan egyszer szerepel?

5. Hányféleképpen tölthettük ki a lottószelvényt, ha az első hatvan számból hat számot a következő módon jelöltünk ki: az elsőnek kijelölt két szám után a harmadik az előző kettő összegének a fele, a negyedik az előző három összegének a fele, az ötödik az előző négy összegének a fele, és végül a hatodik az előző öt összegének a fele?

6. Jelöljük a_i-vel az első i pozitív egész szám összegének utolsó számjegyét. Van-e olyan k pozitív egész szám, hogy bármely pozitív n-re $a_n = a_{n+k}$?

7. Legyen az ABC háromszög A-ból kiinduló súlyvonalának A felöli harmadolópontja H. Szerkesszünk olyan két H-ból kiinduló félegyenest, amelyek az AH szakasszal együtt a háromszöget három egyenlő területű részre osztják.

8. A-ból B-be a folyó folyásával szemben elindul egy hajó, ugyanakkor pedig B-ből A-ba egy csónak, amely útjának 4/11 részét megtéve találkozik a hajóval. A hajó B-ből azonnal visszafordul, és a csónakkal egy időben érkezik A-ba. Ha a csónak sebessége (álló vízben) háromszor akkora volna, akkor 1 óra 42 perccel hamarabb érne A-ba, mint a hajó. Mennyi idő alatt ér a csónak B-ből A-ba (eredeti sebességével)?

Haladók (II. osztályosok)

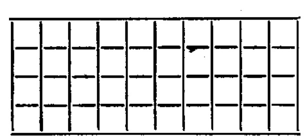
1. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyre az

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}\cdot x - x\sqrt{x-2}}}{\sqrt{\sqrt{x}-2}+1}$$

függvény értelmezhető.

2. Van-e olyan háromszög, melynek két oldala 1 és 4 cm, valamely két magassága pedig 3 és 4 cm hosszú?

3. Hány téglalap jelölhető ki a rajzon látható 4×10-es rács vonalaival?



4. A p prímszám (a tízes számrendszerben felírva) páros sok jegyet tartalmaz. Ha a p számot fordított sorrendben írjuk fel, visszakapjuk saját magát. Határozzuk meg p-t.

5. Az ABC derékszögű háromszögbe írt négyzet két csúcsa az AB átfogón, másik két csúcsa pedig a befogókon van. Mekkora a befogók aránya, ha a négyzet K középpontjára igaz, hogy

$$CAB\sphericalangle = ABK\sphericalangle?$$

6. Legyenek x és y valós számok. Tudjuk, hogy az $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$ számok egyike sem 0 és közülük három racionális. Mutassuk meg, hogy x és y racionális számok.

7. Tetszőleges számú egységnyi, illetve két egységnyi oldalú négyzet áll rendelkezésünkre. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható 1987 darab úgy, hogy belőlük ki lehessen rakni egy négyzetet (hézagtalanul és egyrétűen); viszont bárhogyan is választunk ki 1988 darabot, azokból sohasem állítható elő négyzet.

8. Az a, b, c valós számok olyanok, hogy $|ax^2 + bc + c| \leqq 1$, ha $|x| \leqq 1$. Mutassuk meg, hogy $|x| \leqq 1$ esetén $|cx^2 - bx + a| \leqq 4$ is teljesül.

II. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

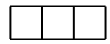
1. Ábrázolja a számegyenesen a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$\frac{x^2+1}{|x-3|} \leqq 1 \qquad \text{és az} \qquad \frac{1}{x+1} > 0$$

egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek.

2. Adott három egységnégyzet az alábbi elrendezéssel:

$H\ G\ F\ E$

 $A\ B\ C\ D$

Bizonyítsuk be (közelítő értékek felhasználása nélkül!), hogy $FAD\sphericalangle + EAD\sphericalangle = 45°$!

3. Mely egyjegyű M pozitív egészekre osztható 5-tel az $1989^M + M^{1989}$?

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Mely egyjegyű M pozitív egészekre osztható 5-tel az $1989^M + M^{1989}$?

2. Az f egyenes az ABC háromszög AB oldalát P-ben, AC oldalát Q-ban metszi és a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{PA+AQ}{BP+PQ+QC+CB} > \frac{1}{4}.$$

3. 10 csapat körmérkőzést játszik. Mindegyik pár pontosan egyszer mérkőzik, és a mérkőzések nem végződhetnek döntetlenül. Győzelemért egy pont jár, vereségért 0. Bizonyítsuk be, hogy a pontszámok négyzetösszege nem lehet több 285-nél.

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Az f egyenes az ABC háromszög AB oldalát P-ben, AC oldalát Q-ban metszi és a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{PA+AQ}{BP+PQ+QC+CB} > \frac{1}{4}.$$

2. Egy négyzet négy csúcsába gyufákat helyezünk. Kezdetben az egyik csúcsán van egy gyufa, a többinél nincs egy sem. Egy lépésben elvehetünk egy csúcsból valahány gyufát, és az egyik szomszédos csúcsba teszünk kétszer annyit, mint amennyit elvettünk. El lehet-e érni ilyen lépések sorozatával, hogy a csúcsoknál – valamilyen körüljárási irányban – rendre $1, 9, 8, 9$ gyufa legyen?

3. Jelöljük a tízes számrendszerben legfeljebb n-jegyű természetes számok számát S-sel, S_k-val pedig ezek közül azoknak a számát, melyekre a számjegyek összege k-nál kisebb. Mely n-ekre létezik olyan k természetes szám, hogy $S = 2S_k$?

Haladók (II. osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. Legyen $f(x) = x^{1989}$, (x valós szám). Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív x_1 és x_2-re:

$$f(x_1 + x_2) \geqq f\left(\sqrt{4x_1x_2}\right)$$

teljesül.

2. Az $ABCD$ tetraéder A csúcsából induló három él hosszának összege $\sqrt{3}$, és az élek páronként merőlegesek egymásra. Az ebben a csúcsban találkozó három lap területének összege $\dfrac{1}{2}$ területegység. Mekkora a tetraéder térfogata?

3. Az $ABCD$ paralelogrammában $BD = AB = CD$. Legyen „k" az a kör, amely a BD átlót B, a CD oldalt C pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az AC átló által k-ból kimetszett M pont rajta van az ABD háromszög köré írt körén.

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Egy trapéz két szomszédos szögének összege $90°$, párhuzamos oldalainak hossza a és b. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamos oldalak felezőpontját összekötő szakasz hossza $\dfrac{1}{2} \cdot |a-b|$.

2. Egy szám négy prímszám szorzata. Melyik ez a szám, ha tudjuk, hogy a négy prímszám négyzetösszege 476?

3. Az origó középpontú R sugarú kör kerületén pontosan 100 olyan pont van, melynek mindkét koordinátája egész szám. Bizonyítsuk be, hogy R vagy $R \cdot \sqrt{2}$ egész szám.

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Melyek azok a természetes számok, amelyek másfélszer akkorák, mint számjegyeik szorzata?

2. Egy derékszögű háromszög két befogója 1 és $\sqrt{3}$ egység hosszú. A háromszögben adott 25 pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható a pontok közül három, amelyek lefedhetők egy $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ átmérőjű félkörlappal.

(A félkörlaphoz a határát is hozzáértjük.)

3. Egy levélre n forint értékű bélyeget kell ragasztani (n pozitív egész szám). Van k darab egész névértékű bélyegünk, összértékük $2k$ forintnál kevesebb, de legalább n. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható néhány bélyeg, amelyek összértéke pontosan n.