Első forduló

I. és II. kategória

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=4\sqrt[4]{x^2-4}$$

egyenletet.

2. Húzzunk érintőket a k körhöz a rajta kívül levő A pontból. Az érintési pontok legyenek B és C. Húzzunk merőlegeseket a k kör tetszőleges pontjából a BC, CA és AB egyenesekre. A merőlegesek talppontjai rendre A_1, B_1, és C_1, ahol $A_1 \in BC, B_1 \in CA$ és $C_1 \in AB$.

Bizonyítsuk be, hogy PA_1 mértani közepe PB_1-nek és PC_1-nek.

3. Egy 8×8-as sakktábla mezőire írjuk be sorban 1-től kezdve a természetes számokat a bal felső sarokból indulva jobbra, majd folytatva a második sorban ugyancsak balról jobbra és így tovább.

Helyezzünk a sakktábla mezőire olyan összefüggő, három kis négyzetből álló alakzatokat, amelyekben nem mind a három négyzet esik egy sorba vagy egy oszlopba. Hány olyan ráhelyezés létezik, amelyben a lefedett mezőkben lévő számok összege osztható 3-mal?

4. Az x valós szám mely értékére van minimuma az

$$f(x)=\sqrt{2x^2-6x+9}+\sqrt{2x^2+6x+9}$$

függvénynek?

5. Egy fából készült téglatest alapéleinek aránya $3:4$, valamennyi élének hossza együttvéve 176 cm. Szétfűrészeljük a testet három szimmetriasíkja mentén, valamint a szemben lévő oldalélpárokkal meghatározott síkok mentén. Az így létrejövő testek összes felszíne háromszor akkora, mint az eredeti test felszíne.

Mekkorák a test élei?

6. Van-e olyan szabályos sokszög, amelyben a leghosszabb és a legrövidebb átló mérőszámának a különbsége egyenlő az oldal mérőszámával?

III–IV. Kategória

1. Egy település lakóinak száma négyzetszám volt. 1000 fővel növekedett a lakosok száma, ekkor egy négyzetszámnál 1-gyel több lett. Újabb 1000 fővel növekedve ismét négyzetszám lett.

Mennyi volt eredetileg a lakosok száma?

2. Az $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ egységnyi területű szabályos tizenkétszög O középpontját tükrözzük az A_1A_2, A_5A_6 és A_9A_{10} egyenesekre. Számítsuk ki az így kapott pontok által meghatározott háromszög területét.

3. A PQR háromszög oldalainak hossza p, q, r. A háromszögről tudjuk, hogy ha n tetszőleges pozitív egész szám, akkor van olyan háromszög, amelynek oldalai p^n, q^n, r^n. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egyenlő szárú.

4. Határozzuk meg

$$\sin\ x_1\cdot\sin\ x_2\cdot\ldots\cdot\sin\ x_n$$

maximális értékét, ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\mathrm{tg\ x_1\cdot tg\ x_2\cdot\ldots\cdot tg\ x_n}=1.$$

5. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O, a kör csúcsot nem tartalmazó AB, BC, CA ívének felezőpontja rendre C_1, A_1, B_1.

Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1},$$

akkor K az ABC háromszögbe írt kör középpontja.

A második (döntő) forduló feladatai

I. kategória

(Szakközépiskolák tanulói részére)

1. Az x, y és z valós számokra teljesülnek a következő összefüggések:

$$x+y=z-1$$
$$xy=z^2-7x+14.$$

Mely z érték esetén lesz az x^2+y^2 összeg értéke maximális?

2. Oldjuk meg a

$$\left|\sin x-\frac{\sin x}{x}\right|+2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\frac{\sin x}{x}=3$$

egyenletet, ahol $x\neq 0$ és $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Az ABC hegyesszögű egyenlő szárú háromszög BC alapjának C végpontja körül $\frac{1}{2}BC$ sugárral kört rajzolunk, amely az AC oldalt D pontban metszi. Kössük össze a háromszög köré írható kör C-t nem tartalmazó AB ívének tetszőleges belső P pontját C-vel, majd húzzunk párhuzamost a D ponton át PC-vel. Ez az egyenes a PA egyenest a Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $PQ=\frac{1}{2}(PC-PB)$.

Hogyan változik a feladat állítása, ha P a körvonal tetszőleges pontja?

II. kategória

(Alaptantervű gimnáziumi osztályok tanulói részére)

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely tíz, egymást követő pozitív egész szám közül legalább egy relatív prím a többi mindegyikéhez.

2. Az ABC háromszögben $AB=AC$. A háromszög beírt körének középpontja legyen O. A BAC szög szárait és az ABC háromszög köré írt kört belülről érintő kör az AB oldalt a P pontban, az AC oldalt a Q pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az O középpont rajta van a PQ szakaszon.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszés szerinti, 3-nál nem kisebb természetes számot jelöl, akkor

$$\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{12}.$$

III. Kategória

(Fakultatív matematikai osztályok tanulói részére)

1. Igazoljuk, hogy ha $a,b,c>0$ valós számok, akkor

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}\geqq\sqrt{a^2+c^2+ac}.$$

2. Jelölje $\Pi(n)$ az n pozitív egész pozitív osztóinak szorzatát
(pl.: $(\Pi(3)=3,\Pi(4)=8)$. Igazolja, hogy ha $\Pi(m)=\Pi n$, akkor $m=n$.

3. Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle=\gamma>ABC\sphericalangle=\beta>BAC\sphericalangle=\alpha$. Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög beírható körének I középpontja a BOM háromszög belsejében van (O az ABC háromszög köré írt kör középpontja, M pedig a magasságpont).

IV. kategória

(A gimnáziumok speciális matematikai osztályai)

1. Hány oldalú (konvex) szabályos sokszögekre igaz, hogy az oldalhosszuk A_iA_{i+1} az A_iA_{i+2} és A_iA_{i+3} átlóhosszak harmonikus közepének a fele, ahol a sokszög csúcsai rendre $A_1,A_2,A_3,\ldots$?

2. Bizonyítsuk be, hogy 13 különböző valós szám között mindig van két olyan (jelölje ezeket c és d), amelyekre

$$0<\frac{c-d}{1+cd}<2-\sqrt{3}.$$

3. Határozza meg az

$$x^2-2y^4=1$$

egyenlet összes egész megoldásait.