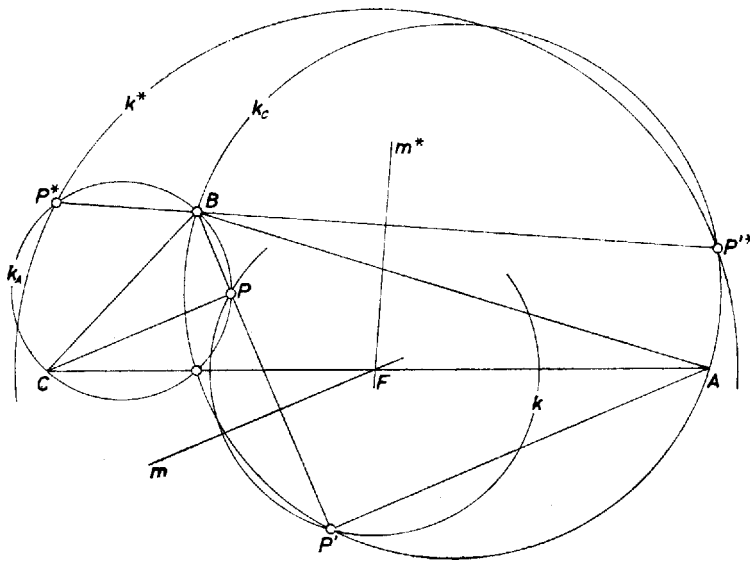


Jelöljük a BC , BA átmérőjű kört rendre k_A -val, k_C -vel, és legyen egy, az előírásnak megfelelő, F körüli kör k . (Az utóbbi minden háromszögben lehetséges, hiszen k_A és k_C két különböző pontban metszik egymást.) Legyen a k_A , k körpár egyik közös pontja P , és tekintsük a PB egyenesnek k_C -vel való, B -tól különböző P' metszéspontját. Azt mutatjuk meg, hogy P' rajta van k -n.



Thalész tétele alapján PB -re merőlegesen áll PC is, $P'A$ is, tehát PC és $P'A$ egy trapéz párhuzamos oldalai, AC pedig vagy átlója ennek vagy szára. (Az ábra k -nak egy más, k^* helyzetét is mutatja; k és P esetében átló, a k^* és P^* esetében szár az AC szerepe. Ha P éppen C -ben van, akkor PC -n k_A -nak C -beli érintője értendő, hasonlóan értendő $P'A$, ha P' az A -ban adódik, ezekben az esetekben derékszögű háromszög adódik a trapéz helyett.) Így az F -en át PB -re állított m merőleges a trapéznak középvonala, tehát merőlegesen felezi a PP' szakaszt, hiszen ez is átlója vagy szára a trapéznak. Eszerint $P'F = PF$, P' a k -n is rajta van, amint állítottuk. Így P' a k , k_C köröknek közös pontja, és a k -n levő P , P' pontpár megfelel a feladat állításának.

A k_A , k körök P -tól különböző Q közös pontjához ugyanígy adódik párként k_C -nek és k -nak egy közös Q' pontja. Csak azt kell még belátnunk, hogy Q' és P' különbözők. Ez abból adódik, hogy a PB és QB egyenesek különbözők, mert egy egyenesnek nem lehet 3 közös pontja egy körrel. (Akkor is különböző PB és QB , ha k átmegy B -n, vagyis P és Q egyike maga B , hiszen pl. $Q = B$ esetén QB -ként k érintője veendő.) Azt is kaptuk, a feladat állításának kiegészítéséül, hogy a metszéspontpárok egyik eleme mindig k_A -hoz, másika a k_C -hez tartozik.

Az F pont és k_A , k_C középpontja az ABC háromszög középháromszögének csücsai, B -vel kiegészítve paralelogrammát adnak. Ebből adódik, hogy k sugarának nagyobbának kell lennie $\frac{|BA - BC|}{2}$ -nél és kisebbnek kell lennie $\frac{BA + BC}{2}$ -nél. Ha a sugár egyenlő bármelyik mondott korláttal, akkor k egyidejűen érinti k_A és k_C mindegyikét. A két ilyen érintkezési pont kivételével k_A -nak minden pontja szerepelhet P -ként (Q -ként), és k_C -nek minden pontja adódik P' -ként (Q' -ként). (Egyébként k_A és k_C szerepe nyilvánvalóan fölcserélhető.)