1. *Oldjuk meg az*

$$x^2 + 3xy = -2,$$
$$2xy - y^2 = -5$$

egyenletrendszert.

Megoldás. Az első egyenletet 5-tel, a másodikat (-2)-vel szorozva, majd az egyenleteket összeadva az

$$5x^2 + 11xy + 2y^2 = 0$$

egyenletet kapjuk (kiküszöböltük a konstansokat).

Innen $x = -2y$ vagy $x = -\frac{1}{5}y$.

Ha $x = -2y$, akkor az első (vagy a második) egyenletbe helyettesítve

$$y^2 = 1; \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

Ha $y_1 = 1$, akkor $x_1 = -2$, ha $y_2 = -1$, akkor $x_2 = 2$.
Ha $x = -\frac{1}{5}y$, akkor $y^2 = \frac{25}{7}$; $y_3 = \frac{5}{\sqrt{7}}$, $y_4 = -\frac{5}{\sqrt{7}}$.
Ha $y_3 = \frac{5}{\sqrt{7}}$, akkor $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{7}}$,
ha $y_4 = -\frac{5}{\sqrt{7}}$, akkor $x_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}$.
Mind a négy számpár valóban megoldás.

2. *Az $x^2+px+q=0$ egyenlet egyik gyöke 3, a másik gyöke megegyezik az egyenlet diszkriminánsának kétszeresével. Számítsa ki p és q értékét.*

Megoldás. Jelölje D az egyenlet diszkriminánsát. Az egyenlet

$$x^2 - (3+2D)x + 6D = 0$$

alakban írható. Mivel

$$D = (3+2D)^2 - 24D,$$

ezért $4D^2 - 13D + 9 = 0$,
és így $D = 1$ vagy $D = \frac{9}{4}$.
Ha $D = 1$, akkor $p = -5$, $q = 6$.
Ekkor $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, így ez valóban megoldás.
Ha $D = \frac{9}{4}$, akkor $p = -\frac{15}{2}$, $q = \frac{27}{2}$.
Ekkor $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = 3$, így ez is valóban megoldás.

3. *Oldja meg az*

$$\lg\,(4-x) + 2\lg\,3 = \lg\,108 - \frac{1}{2}\lg\,x^2$$

egyenletet.

Megoldás. Az egyenlet $(x < 4,\ x \neq 0)$

$$\lg\sqrt{x^2} + \lg(4-x) = \lg108 - \lg9 \quad \text{alakba írható.}$$

Innen

$$\lg|x|(4-x) = \lg12.$$
$$|x|(4-x) = 12.$$

Ha $x > 0$, akkor $x^2 - 4x + 12 = 0$; ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.
Ha $x < 0$, akkor $x^2 - 4x - 12 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 6$.
Ez utóbbi nem lehet megoldás, az $x_1 = -2$ valóban megoldás, hiszen kielégíti az egyenletet.

4. *Az ABC háromszög köré írt kör sugara 5 egység, az AB oldalé 8 egység, a másik két oldal aránya $2:5$. Számítsa ki a háromszög másik két oldalát.*

Megoldás. Jelölje γ az AB oldallal szemközti szöget. Ekkor $8 = 10\sin\gamma$, azaz $\sin\gamma = \frac{4}{5}$, $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, vagy $\cos\gamma = -\frac{3}{5}$. Legyen a másik két oldal $2x$, illetve $5x$.

Ha $\cos\gamma = \frac{3}{5}$, akkor a koszinusztétel alkalmazásával

$$8^2 = (2x)^2 + (5x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 5x\cdot \frac{3}{5},$$
$$x^2 = \frac{64}{17},\quad x = \sqrt{\frac{64}{17}}(= 1{,}94),\quad \text{így}$$

a másik két oldal hossza

$$2\sqrt{\frac{64}{17}} = (3{,}88),\quad \text{illetve}\quad 5\sqrt{\frac{64}{17}}(= 9{,}70)$$

egység, és ilyen háromszög valóban létezik, hiszen $3{,}88 + 8 > 9{,}70$.

Ha $\cos\gamma = -\frac{3}{5}$, akkor

$$8^2 = 4x^2 + 25x^2 + 12x^2,$$
$$x^2 = \frac{64}{41},\quad x = \sqrt{\frac{64}{41}}(= 1{,}25),$$

így a másik két oldal 2,50, illetve 6,25 egység lehet. Mivel $2{,}50 + 6{,}25 > 8$, ezért ilyen háromszög is létezik.

5. *Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az y tengelyt az origóban érinti, és érinti az $y = x + 2$ egyenletű egyenest is.*

Megoldás. Ha egy kör az y tengelyt az origóban érinti, akkor a középpontja az x tengelyre illeszkedik, így a középpont ordinátája $v = 0$, a sugara pedig a középpont abszcisszájának abszolút értéke, tehát $r = |u|$, azaz $r^2 = u^2$. A keresett kör egyenlete tehát

$$(x-u)^2 + y^2 = u^2$$

alakban írható. Egy ilyen egyenletű kör akkor és csakis akkor érinti az $y = x + 2$ egyenletű egyenest, ha az egyenletek által alkotott egyenletrendszer megoldása során (x-re, vagy y-ra) kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla.

$$(x-u)^2 + (x+2)^2 = u^2,$$
$$x^2 - (u-2)x + 2 = 0$$
$$D = (u-2)^2 - 8.$$
$$D = 0,\quad \text{ha}\quad u = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4{,}83,\quad \text{vagy}\quad u = 2 - 2\sqrt{2} \approx -0{,}83.$$

A feltételeknek megfelelő körök egyenlete:

$$(x - (2+2\sqrt{2}))^2 + y^2 = (2+2\sqrt{2})^2,\quad \text{illetve}$$
$$(x - (2-2\sqrt{2}))^2 + y^2 = (2-2\sqrt{2})^2.$$

6. *Mely helyeken veszi fel az*

$$f(x) = \sin^2 2x + 2\cos^2 x - \frac{5}{4}$$

függvény a legnagyobb és a legkisebb értékét a $[0;\pi]$ intervallumban? Mekkora ez a legnagyobb és legkisebb érték?

Megoldás. Mivel $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ és $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$; ezért azonos átalakításokkal

$$f(x) = 1 - \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Tudjuk, hogy $-1 \leqq \cos 2x \leqq 1$, ezért

$$-\frac{3}{2} \leqq \cos 2x - \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2},$$
$$0 \leqq \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{9}{4},\quad \text{így}$$
$$-\frac{5}{4} \leqq f(x) \leqq 1.$$

Az $f(x)$ a legnagyobb értékét, 1-et akkor veszi fel, ha

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{vagy} \quad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z,$$

azaz, $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, vagy $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $\quad k \in Z$ helyeken veszi fel, és ezek közül az $x_1 = \frac{\pi}{6}$ és $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ esik a $[0;\pi]$ intervallumba.

Az $f(x)$ a legkisebb értékét, $-\frac{5}{4}$-et akkor veszi fel, ha

$$\cos 2x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2},$$
$$\cos 2x = -1,$$
$$2x = \pi + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Ezek közül csak az $x_3 = \frac{\pi}{2}$ esik a $[0;\pi]$ intervallumba.

7. *A p valós szám értékétől függően hány megoldása van a*

$$\sqrt{2|\log_2 x| - (\log_2 x)^2} = p$$

egyenletnek?

Megoldás. Ha $p < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Vegyük figyelembe, hogy $a^2 = |a|^2$.

Ha $p = 0$, akkor

$$|\log_2 x|(2 - |\log_2 x|) = 0.$$

Ha $|\log_2 x| = 0$, akkor $x_1 = 1$, ha pedig

$$|\log_2 x| = 2, \quad \text{akkor} \quad \log_2 x = 2 \quad \text{vagy} \quad \log_2 x = -2,$$

azaz $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{1}{4}$.

$p = 0$ esetén az egyenletnek tehát három megoldása van.

Ha $p > 0$, akkor

$$|\log_2 x|^2 - 2|\log_2 x| + p^2 = 0.$$

Ennek diszkriminánsa $D = 4(1 - p^2)$.

Ha $D < 0$, azaz $p > 1$, akkor az egyenletnek nincs megoldása. Ha $D = 0$, azaz, ha $p = 1$, akkor

$$|\log_2 x| = 1, \quad \log_2 x = 1 \quad \text{vagy} \quad \log_2 x = -1,$$

$x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$, azaz $p = 1$ esetén az egyenletnek két megoldása van.

Ha $D > 0$, azaz ha $0 < p < 1$ akkor

$$|\log_2 x| = 1 \pm \sqrt{1 - p^2}.$$

Mivel $y_1 = 1 + \sqrt{1 - p^2} > 0$ és $y_2 = 1 - \sqrt{1 - p^2} > 0$, ezért ez esetben az egyenletnek négy megoldása van. ($x_6 = 2^{y_1}$, $x_7 = 2^{-y_1}$, $x_8 = 2^{y_2}$, $x_9 = 2^{-y_2}$.)

Összefoglalva : Ha $p < 0$ vagy $p > 1$, akkor nincs megoldása az egyenletnek. Ha $p = 0$, akkor a megoldások száma három ($x_1,\ x_2,\ x_3$), ha $p = 1$, akkor a megoldások száma kettő ($x_4,\ x_5$), s ha $0 < p < 1$, akkor a megoldások száma négy ($x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9$).

8. *Egy háromszög a, b és c oldala között a következő összefüggés áll fenn:*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b-c} = \frac{3}{a+b-c}.$$

Mekkora a b oldallal szemközti szög?

Megoldás. Végezzünk ekvivalens átalakításokat.$(b - c \neq 0)$.

$$a(b-c) + (b-c)^2 + (a+b)^2 - c(a+b) = 3(a+b)(b-c).$$

Beszorzás és rendezés után

$$a^2 + c^2 + ac = b^2.$$

A koszinus tétel szerint

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2.$$

Ez utóbbi két egyenletből

$$ac(1 + 2\cos\beta) = 0,$$

$$\cos\beta = -\frac{1}{2},$$

a b oldallal szemközti szög tehát 120°.