**1**. *Igazolja, hogy ha egy háromszög $BC = a$ oldalával szemközti szög $150°$, akkor*

$$b^2 + c^2 = r^2 - 4t\sqrt{3},$$

*ahol $b$, $c$ a háromszög másik két oldala, $r$ a háromszög köré írt kör sugara, $t$ pedig a háromszög területe.*

**Megoldás.** A koszinusztétel szerint

$$b^2 + c^2 = a^2 + 2bc \cdot \cos 150°.$$

A háromszög területe

$$t = \frac{bc \cdot \sin 150°}{2}.$$

Ha $r$ a háromszög köré írt kör sugara, akkor

$$a = 2r \sin 150°.$$

Mivel $\sin 150° = \frac{1}{2}$ és $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ezért $a = r$ és $4t = bc$.

Ezeket felhasználva adódik, hogy valóban

$$b^2 + c^2 = r^2 - 4t\sqrt{3}.$$

**2**. *Tekintsük az*

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + (x-n)^2$$

*függvényt, ahol $n \in N^+$. Mely helyen veszi fel a függvény a legkisebb értékét és mennyi ez a legkisebb érték?*

**Megoldás**. Azonos átalakításokkal

$$f(x) = nx^2 - 2(1 + 2 \ldots + n)x + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Ismeretes, hogy

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

és

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ezeket alkalmazva, majd teljes négyzetté kiegészítve kapjuk a következőket:

$$f(x) = nx^2 - n(n+1)x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$f(x) = n\left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + n \cdot \frac{n^2-1}{12}.$$

Az $f(x)$ függvény az $x_0 = \frac{n+1}{2}$ helyen veszi fel a legkisebb értékét és a legkisebb érték $\frac{n(n^2-1)}{12}$.

**3**. *Igazolja, hogy ha $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, akkor*

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geqq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

*Mikor egyenlő a két kifejezés?*

**Megoldás.** Ekvivalens átalakításokkal az

$$\frac{1}{2}(a+b)\left(a + b + \frac{1}{2}\right) \geqq \sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \tag{1}$$

egyenlőséget kell igazolni.
Mivel

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}, \tag{2}$$

ezért elegendő igazolni a következőket:

$$a + b + \frac{1}{2} \geqq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \tag{3}$$

illetve

$$(4) \qquad a-\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+\frac{1}{2} \geqq 0.$$

Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy

$$a-\sqrt{a}+b-\sqrt{b}+\frac{1}{2}=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^{2}.$$

Mivel $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\sqrt{b}-\frac{1}{2}\right)^{2} \geqq 0$, ezért a (4), a (3) és így az (1) egyenlőtlenséget is igazoltuk. A (2) illetve a (3) egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor áll fenn, ha $a=b$, illetve $a=\frac{1}{4}$ és $b=\frac{1}{4}$, ezért az (1)-ben csak $a=\frac{1}{4}$ és $b=\frac{1}{4}$ esetén áll fenn egyenlőség.

**4**. *Az $ABC$ háromszög oldalai $AB=13$; $BC=20$; $CA=21$ egység. Számítsa ki a $BC$ oldalhoz tartozó súlyvonal hosszát.*

**Megoldás.** Jelölje a $BC$ oldal felezőpontját $A_1$, az $AA_1B$ szöget $\varphi$, így az $AA_1C$ szög $180^\circ-\varphi$, végül legyen $AA_1=s$. Az $AA_1B$ és az $AA_1C$ háromszögekben alkalmazzuk a koszinusztételt:

$$13^2=s^2+10^2-2\cdot s\cdot 10\ \cos\ \varphi,$$
$$21^2=s^2+10^2+2\cdot s\cdot 10\ \cos\ \varphi$$

mert $\cos(180^\circ-\varphi)=-\cos\ \varphi$. E két egyenlet összeadása, majd a kapott egyenlet rendezése után

$$s^2=\frac{1}{2}\left(13^2+21^2-2\cdot 10^2\right)$$
$$s^2=205, \quad s=\sqrt{205}\approx 14,32.$$

Az adatok a háromszöget egyértelműen meghatározzák, igy az $AA_1$ súlyvonal hossza $14,32$ egység.

**5**. *Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek az $e$ (egyenlete: $x-y=2$) és az $f$ (egyenlete: $x+2y=14$) egyenesek közé eső szakaszát a $P(2;1)$ pont az $e$ egyenestől számítva $1:2$ arányban osztja.*

**Megoldás.** Az $e$ egyenes egy tetszőleges pontja $E(t;t-2)$, $t\in R$, az $f$ egyenes egy tetszőleges pontja $F(14-2u;u)$, $u\in R$. Azokat az $E$ és $F$ pontokat keressük, amelyekre

$$FP=2\cdot PE$$

azaz

$$\overrightarrow{FP}=2\cdot\overrightarrow{PE}.$$

Mivel $\overrightarrow{FP}=(2u-12;1-u)$, $\overrightarrow{PE}=(t-2;t-3)$, ezért

$$2u-12=2t-4,$$

és

$$1-u=2t-6,$$

ahonnan $t=1$, $u=5$, azaz a szóban forgó $E$ pont $E(1;-1)$ és az $F$ pont $F(4,5)$, így a keresett egyenes ($EP$) egyenlete: $2x-y=3$.

*Megjegyzés:* A feladat más módon is megoldható. Az $e$ és $f$ egyenes metszéspontja $G(6;4)$. Legyen $Q$ az a pont, amelyre $\overrightarrow{GQ}=3\cdot\overrightarrow{PG}$. Most $Q(-6;-5)$. A $Q$ ponton áthaladó, az $e$ egyenessel párhuzamos egyenes (egyenlete: $x-y=-1$ az $f$ egyenest az $F(4;5)$ pontban metszi (miért?), így az $FP$ egyenes egyenlete: $2x-y=3$.

**6**. *Egy négyzetes oszlop alapéle $a$, magassága $m$ (térfogatát jelölje $V_1$); egy szabályos háromoldalú gúla alapéle $b$, magassága $m$ (térfogatát jelölje $V_2$.)*

a) *Mekkora a $\frac{b}{a}$ arány, ha $V_1=\sqrt{3}\cdot V_2$?*

b) *Mekkora az $\frac{m}{a}$ arány, ha $V_1=\sqrt{3}\cdot V_2$ és a négyzetes oszlop palástfelszíne egyenlő a gúla palástfelszinével (oldallapjai területének összegével)?*

**Megoldás.**

a) $V_1 = a^2 m, \qquad V_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{m}{3},$
A feltétel szerint $\sqrt{3} \cdot V_2 = V_1$, tehát

$$\frac{b^2 m}{4} = a^2 m, \qquad \text{amiből} \qquad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 4,$$

s mivel $\frac{b}{a} > 0$, ezért $\frac{b}{a} = 2$.

b) A gúla alaplapjának magassága $\frac{b\sqrt{3}}{2}$, ennek harmada $\frac{b}{2\sqrt{3}}$.
Ha a gúla oldallapjának a $b$ oldalhoz tartozó magassága $m_1$, akkor

$$m_1^2 = m^2 + \frac{b^2}{12}, \qquad \text{s mivel} \quad b = 2a,$$

ezért $m_1^2 = m^2 + \frac{a^2}{3}$.
A feltétel szerint a palást felszínek egyenlők, tehát

$$4am = 3 \cdot \frac{2a\sqrt{m^2 + \frac{a^2}{3}}}{2},$$

amiből $7m^2 = 3a^2$, azaz $\frac{m}{a} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

**7**. *Oldja meg a*

$$\log_3 \frac{1}{x^2} + 3 \cdot \log_x \frac{1}{9} \geqq -8$$

*egyenlőtlenséget!*

Vegyük figyelembe, hogy $x > 0$ és $x \neq 1$. Azonosságok alkalmazásával, ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$-2\log_3 x - 6\log_x 3 \geqq -8,$$
$$\log_3 x + 3\log_x 3 \leqq 4.$$

Legyen $\log_3 x = z$, ekkor $\log_x 3 = \frac{1}{z}$, és az egyenlőtlenség a következő alakra hozható

$$\frac{z^2 - 4z + 3}{z} \leqq 0.$$

Ennek megoldása (algebrai vagy grafikus úton)

$$z < 0 \qquad \text{vagy} \qquad 1 \leqq z \leqq 3,$$

így $\log_3\ x < 0$, vagy $1 \leqq \log_3\ x \leqq 3$.
A 3 alapú logaritmus- (vagy az exponenciális-) függvény szigorú monoton növekedése miatt az egyenlőtlenség megoldásai

$$0 < x < 1 \qquad \text{vagy} \qquad 3 \leqq x \leqq 27.$$

**8**. *Mely $\alpha$-ra van pontosan egy valós gyöke az*

$$x^2 + \frac{2x}{\sqrt{\cos\alpha}} + \left(\frac{1}{\sin\alpha} + 2\sqrt{2}\right) = 0$$

*egyenletnek?*

**Megoldás.**

Az egyenletnek $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha \neq 0$ esetén van értelme, azaz ha

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2k\pi \qquad \text{vagy} \qquad 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z.$$

Az egyenletnek akkor van pontosan egy valós gyöke, ha a

$$D = \frac{4}{\cos\alpha} - \frac{4}{\sin\alpha} - 8\sqrt{2}$$

diszkriminns nulla.
Ez akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\ \alpha - \cos\ \alpha) = \sin\ 2\alpha.$$

Mivel $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, ezért $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\ 2\alpha$.

Ez utóbbi egyenlet megoldásai

$$2\alpha = \alpha - \frac{\pi}{4} + 2n\pi \quad \text{vagy} \quad 2\alpha = \pi - \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 2m\pi,$$

$n,\ m \in Z$

$$\alpha_{1,n} = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad \text{vagy} \qquad \alpha_{2,m} = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{3}m\pi.$$

$$\alpha_{1,n}\ \text{ esetén }\ \cos\ \alpha > 0, \quad \sin\ \alpha \neq 0\ \text{ és }\ D = 0,$$

tehát megoldások.

Ha $m = 3k$, akkor $\alpha_{2,k} = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ szintén megoldás; ha $m = 3k + 1$, akkor $\cos\ \alpha < 0$, így nem megoldás, míg ha $m = 3k + 2$, akkor $\alpha_{3,k} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ szögek egybeesnek az $\alpha_{1,n}$ szögekkel, így attól nem eltérő megoldások.