1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$(x-2)^2=\sqrt{4-4x+x^2}.$$

Megoldás.

$$(x-2)^2=|x-2|.$$

Ha $x\geq 2$, akkor

$$(x-2)^2=x-2,$$

azaz $x^2-5x+6=0,\ x_1=2;\ x_2=3$; ha $x<2$, akkor

$$(x-2)^2=2-x,$$

azaz $x^2-3x+2=0,\ x_3=1;\ x_4=2$.

Az x_4-re nem teljesül, hogy $x<2$.

Az egyenlet megoldása $x_1,\ x_2,\ x_3$.

2. Egy szimmetrikus trapéz átlói merőlegesek egymásra és két olyan részre osztják egymást, amelyek aránya $7:17$. *Mekkora a trapéz területe, ha kerülete* $100\sqrt{2}$ *egység?*

Megoldás. Jelölje a és c a két párhuzamos oldal, b a szárak hosszát. A feltétel szerint az átló két szelete $7x$, illetve $17x$. Az átlók a trapézt négy derékszögű háromszögre bontják, amelyek közül kettő egyenlő szárú.

A Pitagorasz -tétel alkalmazásával adódik, hogy

$$a=17x\sqrt{2};\quad c=7x\sqrt{2}\quad \text{és}\quad b=13x\sqrt{2}.$$

A feltétel szerint:

$$17x\sqrt{2}+7x\sqrt{2}+2\cdot 13x\sqrt{2}=100\sqrt{2},\quad \text{ahonnan}$$
$$x=2,\quad 7x=14,\quad 17x=34.$$

A trapéz területe a négy derékszögű háromszög területének összege, azaz

$$t=\frac{14^2}{2}+\frac{34^2}{2}+2\cdot\frac{14\cdot 34}{2},$$

$t=1152$ területegység.

3. Oldjuk meg és vizsgáljuk az

$$ax+3y=12,$$
$$12x+ay=24$$

egyenletrendszert, ahol a valós paraméter.

Megoldás. Az első egyenlet a-szorosából vonjuk ki a második egyenlet 3-szorosát.

$$(a^2-36)x=12a-72,$$
$$(a-6)(a+6)x=12(a-6).$$

Ha $a\neq 6$ és $a\neq -6$, akkor

$$x=\frac{12}{a+6},\qquad \text{és kapjuk, hogy}\qquad y=\frac{24}{a+6},$$

és ez a számpár ez esetben valóban megoldás.

Ha $a=6$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, az $x=t,\ y=4-2t,\ t\in R$ számpárok, hiszen ekkor $6x+3y=12$ és $12x+6y=24$, azaz a két egyenlet ekvivalens, $2x+y=4,\ y=4-2x$.

Ha $a=-6$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása (a két egyenlet ellentmondó), hiszen ekkor

$$-6x+3y=12\quad \text{és}\quad 12x-6y=24,\quad \text{azaz}$$
$$2x-y=-4,\quad \text{és}\quad 2x-y=4.$$

4. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB=AC=4$ *egység. A háromszög területe* 4 *területegység. Számítsuk ki a háromszög szögeit és a* BC *oldal hosszát.*

Megoldás. Jelölje m a $BC=a$ oldalhoz tartozó magasságot. Ekkor

$$\frac{am}{2}=4\quad \text{és}\quad m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=16,\quad \text{ahonnan}$$
$$a^4-64a^2+4\cdot 64=0,$$

így $a_1 = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ vagy $a_2 = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Az alapon fekvő szöget jelölje β.

Ekkor $\cos\beta = \frac{a}{8}$, így $\beta_1 = 75^\circ$, $\beta_2 = 15^\circ$, és $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 150^\circ$.

5. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az

$$x^2 - ax + 2a - 4 = 0$$

egyenlet egyik gyöke a másik gyökének háromszorosa legyen.

Megoldás. Az egyenlet diszkriminánsa

$$D = a^2 - 4(2a-4) = (a-4)^2.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_{1,2} = \frac{a \pm (a-4)}{2}$, $x_1 = a-2$, $x_2 = 2$.

Ha $x_1 = 3x_2$, akkor $a - 2 = 6$, $a = 8$, és ez megfelel a feltételeknek, hiszen $x^2 - 8x + 12 = 0$ egyenlet gyökei 2 és 6; ha $x_2 = 3x_1$, akkor $2 = 3a - 6$, $a = \frac{8}{3}$, és ez is megfelel a feltételeknek.

6. Egy trapéz egyik oldala 8 *egység, a vele párhuzamos oldal és a magasság összege* 12 *egység. Hogyan kell megválasztani a trapéz magasságát, hogy a trapéz területe a lehető legnagyobb legyen? Mekkora a legnagyobb terület?*

Megoldás. Alkalmazhatjuk a két pozitív szám számtani és mértani közepe közötti egyenlőtlenséget.

Ezek szerint ha $a > 0$ és $b > 0$, akkor

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \quad \text{tehát} \quad ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

ahol az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$. Most $t(m) = \frac{1}{2}m(20-m)$, ahol $m > 0$ és $20 - m > 0$, (m a trapéz magasságát és t a trapéz területét jelöli):

$$\frac{1}{2}m(20-m) \le \frac{1}{2}\left(\frac{m+20-m}{2}\right)^2 = 50.$$

Így $t(m)$ akkor a legnagyobb, ha $m = 20 - m$, $m = 10$, és ez valóban 0 és 12 közé esik. A legnagyobb $t(m)$ érték 50 területegység.

7. Egymástól 8 *egység távolságban haladó párhuzamos egyenesek között két, egymást érintő, egyenlő sugarú kör helyezkedik el. (A körök az egyeneseket is érintik.) A két kör középpontján áthaladó, az adott párhuzamos egyenesekre merőleges egyenesek távolsága* 4 *egység. Számítsuk ki a körök sugarát.*

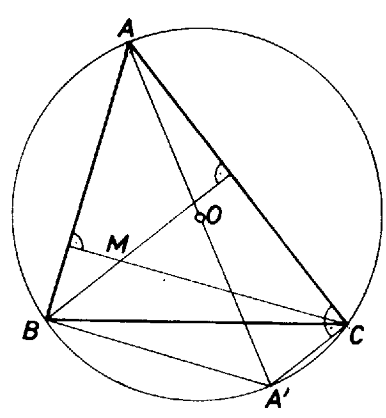
Megoldás. A két kör középpontját összekötő szakasz hossza $2r$ ahol r a körök sugara. Az egyik kör középpontjából bocsássunk merőlegest a másik kör középpontján áthaladó, a párhuzamos egyenesekre merőleges egyenesre. Az így kapott derékszögű háromszög átfogója tehát $2r$, a két befogó 4, illetve $8 - 2r$.

A Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

$$4r^2 = 16 + (8-2r)^2, \quad r = \frac{5}{2}.$$

A körök sugara tehát $\frac{5}{2}$ egység.

8. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M, a körülírt kör A-val átellenes pontja A'! Igazoljuk, hogy a $BMCA'$ négyszög paralelogramma.



Megoldás. Az AA' a kör átmérője, tehát a Thalesz-tétel alapján $A'C$ merőleges AC-re, és $A'B$ merőleges AB-re. Mivel BM (magasságvonal) szintén merőleges AC-re, ezért BM párhuzamos $A'C$-vel, mivel CM (magasságvonal) szintén merőleges AB-re, ezért CM párhuzamos $A'B$-vel. A $BMCA'$ négyszög szemközti oldalai tehát párhuzamosak, a négyszög így valóban paralelogramma.