

1. Igazolja, hogy ha egy háromszög $BC = a$ oldalával szemközti szög 150° , akkor

$$b^2 + c^2 = r^2 - 4t\sqrt{3},$$

ahol b , c a háromszög másik két oldala, r a háromszög köré írt kör sugara, t pedig a háromszög területe.

2. Tekintsük az $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \dots + (x-n)^2$ függvényt, ahol $n \in \mathbf{N}^+$. Mely helyen veszi fel a függvény a legkisebb értékét, és mennyi ez a legkisebb érték?

3. Igazolja, hogy ha $a \geq 0$, $b \geq 0$, akkor

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

Mikor egyenlő a két kifejezés?

4. Az ABC háromszög oldalai $AB = 13$; $BC = 20$; $CA = 21$ egység. Számítsa ki a BC oldalhoz tartozó súlyvonal hosszát.

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek az e (egyenlete: $x - y = 2$) és az f (egyenlete: $x + 2y = 14$) egyenesek közé eső szakaszát a $P(2; 1)$ pont az e egyenestől számítva $1 : 2$ arányban osztja!

6. Egy négyzetes oszlop alapéle a , magassága m (térfogatát jelölje V_1); egy szabályos három oldalú gúla alapéle b , magassága m (térfogatát jelölje V_2).

a) Mekkora a $\frac{b}{a}$ arány, ha $V_1 = \sqrt{3} \cdot V_2$?

b) Mekkora az $\frac{m}{a}$ arány, ha $V_1 = \sqrt{3} \cdot V_2$ és a négyzetes oszlop palástfelszíne egyenlő a gúla palástfelszínével (oldallapjai területének összegével)?

7. Oldja meg a $\log_3 \frac{1}{x^2} + 3 \cdot \log_x \frac{1}{9} \geq -8$ egyenlőtlenséget!

8. Mely α -ra van pontosan egy valós gyöke az $x^2 + \frac{2x}{\sqrt{\cos \alpha}} + \left(\frac{1}{\sin \alpha} + 2\sqrt{2} \right) = 0$ egyenletnek?