

1. Adott a következő kifejezés:

$$F(x, y) = \frac{x^3 - x^2y + xy^2 - x - y^3 + y}{x^3 - x^2y + xy^2 + x - y^3 - y}.$$

a) Egyszerűsítse  $F(x, y)$ -t.

b) Mutassa meg, hogy ha  $x = \frac{k(1-z^2)}{1+z^2}$  és  $y = \frac{2+z}{1+z^2}$ , akkor  $F(x, y)$  nem függ  $z$ -től!

2. Az  $m$  valós paraméter milyen értékére lesz a következő egyenletrendszer megoldható?

$$\begin{aligned}3x + y &= 2, \\x + 2y &= m + 8, \\(m - 4)x + y &= -10.\end{aligned}$$

3. Egy  $r$  sugarú és  $m$  magasságú egyenes körkúp alakú edény magassága feléig folyadékkal van töltve. Fordítsuk meg a kúpot úgy, hogy a csúcsa legyen lefelé. A csúcstól számítva milyen magasan lesz a folyadék az edényben?

4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

$$a) x^{\log_x(x-2)^2} = g; \quad b) x^{\log_{x^2}(x^2-5)} = 2.$$

5. Legyenek  $a, b, c$  egy mértani sorozat egymásutáni elemei. Igazolja, hogy ekkor

$$\frac{1}{3} \leq \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 - bx + c} \leq 3.$$

6. Oldja meg azt a másodfokú egyenletet, amelynek gyökei kielégítik a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned}4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) &= -4, \quad \text{és} \\(x_1 - 1)(x_2 - 1) &= \frac{1}{1+p}.\end{aligned}$$

Határozza meg a  $p$  értékét úgy, hogy  $x_1^2 + x_2^2 = 11$  legyen!

7. Oldja meg a következő egyenletet:

$$3 \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha - 2 \cos \alpha - \sin 2\alpha - \sin \alpha = 0.$$

8. Egy derékszög egyik szárán felvesszük az  $A$  és  $B$  rögzített pontokat, a másik szárán pedig a változó  $L$  pontot. A derékszög  $O$  csúcsának az  $LA$ , illetve  $LB$  egyenesre eső vetülete  $P$ , illetve  $Q$ .

a) Igazolja, hogy a  $PQ$  egyenes a derékszög  $AB$  szárát egy rögzített  $M$  pontban metszi.

b) Határozza meg, hogy milyen arányban osztja az  $M$  pont az  $AB$  szakaszt!