1988. november 18-án került sor a jövő évi Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára készülő magyar diákok első matematika versenyére. A versenyen 15 feladat szerepelt, mindegyik feladat kérdésére egyetlen, 1000-nél kisebb pozitív szám volt a válasz. A versenyzőknek csak ezt a számot kellett leírniuk minden egyes feladat esetén.[1]

A feladatok:

1. Egy 10 nyomógombos öt-nyomásos zár úgy nyílik, hogy tetszőleges sorrendben megnyomjuk az öt megfelelő gombot. A zárat átalakítják, és ezután egytől kilencig tetszőleges számú nyomógombon beállítható a zárat nyitó kombináció. Mennyivel nő így a lehetőségek száma? (A verseny tétellapján sajnálatos módon kimaradt a szöveg második szava, a „10” szám, így ezt a feladatot a verseny értékelése során nem vették figyelembe.)

2. Tetszőleges pozitív egész k-ra jelölje $Q_1(k)$ a tízes számrendszerben felírt k szám jegyeinek a négyzetösszegét. Ha $n \geq 2$, akkor legyen

$$Q_n(k) = Q_1\big(Q_{n-1}(k)\big).$$

Határozzuk meg

$$Q_{1088}(11)$$

értékét.

3. Mennyi $(\log_2 x)^2$, ha $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$?

4. Legyen $|x_i| < 1$, ha $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Tegyük fel továbbá, hogy $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = 19 + |x_1 + \ldots + x_n|$. Milyen kicsi lehet az n?

5. Jelölje $\dfrac{m}{n}$ annak a valószínűségét, hogy 10^{99} egy véletlenszerűen kiválasztott osztója osztható 10^{88}-nal. Ha $(m,\ n) = 1$, akkor mekkora $m + n$ értéke?

6. Írjunk pozitív egészeket az ábra 21 üres mezőjébe múgy, hogy mind az öt sorban és mind az öt oszlopban egy–egy számtani sorozat álljon. Milyen szám kerül a $*$-gal megjelölt mezőbe?

				*
	74			
				186
		103		
0				

7. Az ABC háromszögben tg CAB$\sphericalangle$ $= 22/7$, az A-ból induló magasság pedig két olyan szakaszra osztja a BC oldalt, melyek hossza 3 és 17. Mekkora az ABC háromszög területe?

8. A pozitív egészekből készíthető rendezett párok halmazán értelmezett f függvényre teljesül, hogy

$$f(x,x) = x, \quad f(x,y) = f(y,x)$$

és

$$(x+y)f(x,y) = y \cdot f(x,x+y).$$

Mennyi $f(14{,}52)$ értéke?

9. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek köbe 888-ra végződik?

10. Egy 26 lapú konvex poliédernek 12 négyzet-, 8 szabályos hatszög – és 6 szabályos nyolcszöglapja van. A poliéder minden csúcsában egy-egy négyzet-, hatszög- és nyolcszöglap találkozik. A poliéder csúcsait összekötő szakaszok közül hány halad a poliéder belsejében?

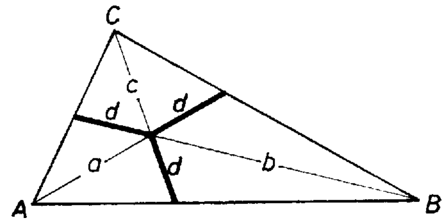
11. Az L egyenest a sík adott $Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_n$ pontjai átlagegyenesének mondjuk, ha az L egyenesen léteznek olyan $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n$ pontok, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OQ_i} = \mathbf{0}.$$

Tudjuk, hogy a $Q_1(32;\ 170)$, $Q_2(-7;\ 64)$, $Q_3(-9;\ 200)$, $Q_4(1;\ 27)$, $Q_5(-14;\ 43)$ pontoknak létezik – mégpedig csak egy – átlagegyenese, amelyik a $(0;\,3)$ pontban metszi az y tengelyt. Mekkora ennek az átlagegyenesnek a meredeksége? (Ahol O az origót jelöli).

12. Legyen P az ABC háromszög belső pontja, és kössük össze P-t a háromszög csúcsaival az ábra szerint.

[1] A helyes válszok e szám 16. oldalán találhatók.



Határozzuk meg az abc szorzatot, ha

$$a + b + c = 43 \quad \text{és} \quad d = 3.$$

13. Az A, B egészekre $Ax^{17} + Bx^{16} + 1$ osztható az $x^2 - x - 1$ polinommal. Mekkora az A?

14. Legyen C az $xy = 1$ egyenletű görbe, C^* pedig a C tükörképe az $y = 2x$ egyenletű egyenesre. Írjuk C^* egyenletét

$$12x^2 + bxy + cy^2 + d = 0$$

alakba. Mennyi a bc szorzat értéke?

15. Egy hivatalban a főnök naponta kilenc alkalommal egy-egy levelet ad át a titkárnőnek gépelésre. A levelek 1-től 9-ig vannak számozva, és a főnök ebben a sorrendben adja át őket, a soronkövetkezőt mindig a titkárnő irattartójába legfelülre téve, aki – ha éppen van egy kis ideje gépelésre – mindig a legfelső levelet veszi le a halomból. Ebéd közben a titkárnő elmondta egy kollégájának, hogy a 8-as számú levelet már legépelte, de semmi mást nem mond arról, hogy milyen további leveleket gépelt a délelőtt folyamán. A kollégája elgondolkodik, hogy a kilenc levél közül vajon melyek maradhattak ebéd utánra és milyen sorrendben kerülhet rájuk a sor. A délutánra maradt leveleknek összesen hányféle gépelési sorrendje képzelhető el?

(Az is egy lehetőség, hogy valamennyi levél elkészült még ebéd előtt.)

Az Olimpiára előkészítő feladatok eredményei

(1) 770, (2) 37, (3) 27, (4) 20, (5) 634, (6) 172, (7) 110, (8) 364, (9) 192, (10) 840, (11) 163, (12) 441, (13) 987, (14) 84, (15) 704.