

1. Bizonyítsuk be, hogy az $\{1, 2, \dots, 1989\}$ halmaz előáll 117 darab olyan diszjunkt halmaz, A_1, A_2, \dots, A_{117} egyesítéseként, amelyekre teljesül, hogy

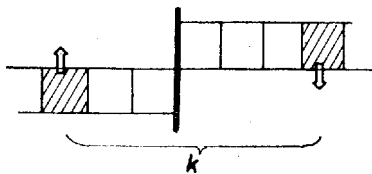
- mind egyiküknek 17 eleme van, továbbá, hogy
- mind egyikükben ugyanannyi az elemek összege.

Az ilyen típusú feladatokra általában kétféle megoldás lehetséges. Az egyik csak a felosztás létezését igazolja, a másik megkonstruálja a felosztást is. Én ez utóbbit választottam. Sikerült találnom egy olyan módszert, amely két lépésben elkészíti a kívánt felosztást. Könnyen ellenőrizhető, hogy $1989 = 17 \cdot 117$. Ezt felhasználva első lépésben soroljuk be a számokat az ábrán látható módon.

	A				B				C								
	1 ... 8	9 ... 16	...	921 ... 928	929 ... 936	937	...	994	995	996	...	1053	1054 ... 1061	1062 ... 1069	...	1974 ... 1981	1982 ... 1989
1	8db								1db								
2								1db									
3																	
4																	
...																	
116				8db								1db		8db			
117						1db											

1. ábra

Minden sorban pontosan 17 szám van, ezek alkotnak egy csoportot. Az első sorban a számok összege éppen megfelelő. Maradt 116 sorunk. Vizsgáljuk meg ezeket párosával az ábra szerint. Az A és C-vel jelzett csoportokban az egy sorban lévő számok összege mindenütt $995 \cdot 16$, tehát ugyanannyi. Csak a B-vel jelzett részben a „középső” satírozott elem változik. Minden egyes párban a B-ben lévő elem ugyanannyival tér el a 995-től, az egyikük nagyobb, a másikuk kisebb. Tehát két ilyen szomszédos sorban is megfelelő a számok együttes összege. Ha a szomszédos sorokat párosával rendezbe tudjuk tenni, akkor készen is vagyunk.



2. ábra

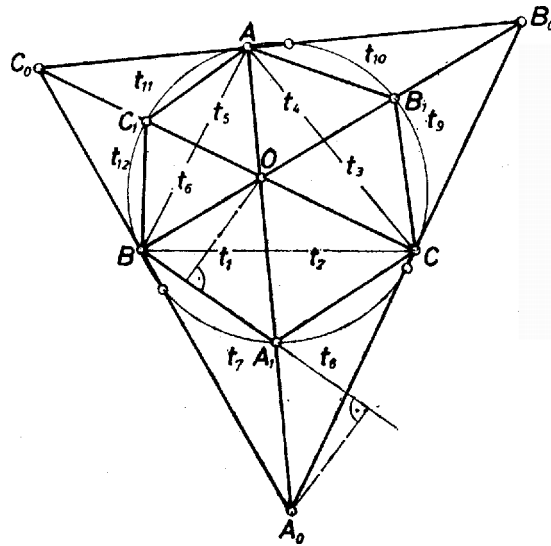
Második lépésben tehát vegyük azt a párt, ahol a középső B-beli elemnek a 995-től való eltérése éppen d . (d 1-től 58-ig változhat, mert $2 \cdot 58 + 1 = 117$). A pár első sorában a kívánt értéktől való eltérés d , a másodikban $-d$. Ha a C-beli nyolcasokban kicserélünk az ábrán látható módon két számot, melyek egymástól k távolságra vannak ($1 \leq k \leq 15$), akkor az egyik sorban k -val nő, a másikban pedig k -val csökken az összeg. Ha $1 \leq d \leq 15$, akkor így egyetlen cserével helyrehozható az eltérés. Ha az eltérés nagyobb 15-nél, akkor a két szélsőt kicseréljük, és a maradék 14 számmal tetszőlegesen megmaradó különbség helyrehozható 1-től 13-ig. Ha még ez sem elég, akkor a 14 szám közül a két szélsőt ismét cseréljük ki. A maradék 12 számmal tetszőlegesen megmaradó különbség korrigálható 1-től 11-ig. Látható, hogy C-beli elemek alkalmas cseréjével tetszőleges eltérés korrigálható az alábbi határig: $15 + 13 + 11 + \dots + 3 + 1 = 64$. Ez nagyobb mint 58, tehát mindegyik párnál elvégezhető a csere. Ezzel a feladatot megoldottuk.

(Pásztor Gábor)

2. A hegyesszögű ABC háromszög A -ból, B -ből és C -ből induló belső szögfelezői rendre az A_1, B_1 , illetve C_1 pontban metszik a háromszög körülírt körét. Az AA_1 egyenest az A_0 pontban metszi a B - és a C -béli külső szögfelező és hasonlóan kapjuk a B_0 és a C_0 pontokat. Bizonyítsuk be, hogy

- az $A_0B_0C_0$ háromszög területe egyenlő az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területének kétszeresével;
- az $A_0B_0C_0$ háromszög területe legalább négyszer akkora, mint az ABC háromszög területe.

Mivel a háromszög egy szögének külső és belső szögfelezője merőleges egymásra, az A, B, C pontok az $A_0B_0C_0$ háromszögben a magasságvonalak talppontjai. Ismeretes, hogy egy háromszög Feuerbach-köre áthalad a magasságok talppontjain, az ABC háromszög köré írt köre tehát az $A_0B_0C_0$ háromszög Feuerbach-köre. A Feuerbach-kör áthalad az OA_0, OB_0, OC_0 felezőpontján is, ezért $OA_1 = A_1A_0, OB_1 = B_1B_0, OC_1 = C_1C_0$.



3. ábra

Jelöljük a kis háromszögek területét t_i -vel ($i = 1, 2, \dots, 12$) az ábra szerint. Így $t_1 = t_7$, mert a két háromszög alapja és magassága egyenlő. Ugyanígy kapjuk, hogy $t_2 = t_8$, $t_3 = t_9$, $t_4 = t_{10}$, $t_5 = t_{11}$, $t_6 = t_{12}$. Ezeket összeadva:

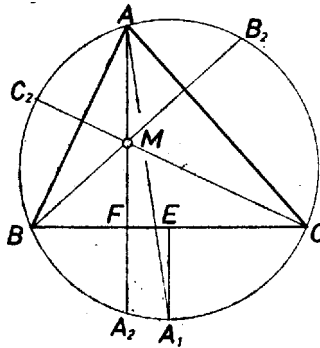
$$t_1 + t_2 + \dots + t_6 = t_7 + t_8 + \dots + t_{12}.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva az egyenlet bal oldalát:

$$2(t_1 + t_2 + \dots + t_6) = t_1 + t_2 + \dots + t_{12}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

A második állítás igazolásához ezután elegendő belátni, hogy az $AC_1BA_1CB_1$ hatszög területe legalább kétszerese az ABC háromszög területének.



4. ábra

Jelöljük az ABC háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkoztatott tükörképeit rendre A_2, B_2, C_2 -vel. Ismert, hogy ezek a pontok a körülírt körön vannak. Az A_1 pont a BC ív (A -t nem tartalmazó ívének) felezőpontja, mert BA_1 és CA_1 ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők, tehát az A_1E szakasz (E a BC szakasz felezőpontja) nem kisebb az A_2F szakasznál (F az A_2 vetülete BC -re).

Ezért $t_{BA_1C} \geq t_{BA_2C}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $t_{CB_1A} \geq t_{CB_2A}$, $t_{AC_1B} \geq t_{AC_2B}$. Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva

$$t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geq t_{BA_2C} + t_{CB_2A} + t_{AC_2B}.$$

A jobb oldalon éppen az ABC háromszög területe áll, mert a kis háromszökeket tükrözve az oldalegyenesekre A_2, B_2, C_2 pontok tükörképe éppen a magasságpont, és így a tükörképek egyrétűen fedik le az ABC háromszöget.

Azaz

$$t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geq t_{ABC}.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva t_{ABC} -t

$$t_{ABC} + t_{BA_1C} + t_{CB_1A} + t_{AC_1B} \geq 2t_{ABC}.$$

Így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk, mert a bal oldal 4 háromszöge éppen lefedi az $AC_1BA_1CB_1$ hatszöget.

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha A_1 és A_2 , B_1 és B_2 , C_1 és C_2 egybeesik, ami azt jelenti, hogy a háromszög minden alapról nézve egyenlő szárú, tehát szabályos. Szabályos háromszögben pedig nyilván fennáll az egyenlőség.

(Pásztor Gábor)

3. Legyenek az n és k adott pozitív egész számok, az S pedig olyan n -elemű síkbeli ponthalmaz, amelynek

a) semelyik három pontja nincs egy egyenesen;

b) az S halmaz minden P pontjához található legalább k darab S -beli pont, amelyek mind egyenlő távolságra vannak a P ponttól.

Bizonyítsuk be, hogy

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Sajnos a feladatra a magyar versenyzők egyike sem talált megoldást – utólag ez bizonyult a verseny legnehezebb feladatának.

A megoldás első lépése a bizonyítandó egyenlőtlenség valamivel megfoghatóbb, beszédesebb alakban történő felírása. Rendezés után négyzetre emelve

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n,$$

azaz

$$\frac{k^2 - k}{2} + \frac{1}{8} < n$$

adódik. A bal oldal első tagja egész, így elegendő igazolnunk, hogy

$$\frac{k^2 - k}{2} \leq n - 1.$$

A bal oldalon éppen $\binom{k}{2}$, a k elem közül választható párok száma áll.

A halmaz minden P pontjához tekintsük tehát a tőle egyenlő távolságra lévő k darab S -beli pontból készíthető pontpárokat. Így összesen

$$n \cdot \binom{k}{2}$$

pontpárt kapunk. Ha most egy S -beli (A, B) pontpárt számba veszünk egy P pontnál, akkor a P rajta van az AB felezőmerőlegesén. Mivel az S -ben nincs három egy egyenesre eső pont, a fenti leszámolás során tetszőleges S -beli pontpárt legfeljebb kétszer kaphatunk meg, azaz

$$n \cdot \binom{k}{2} \leq 2 \cdot \binom{n}{2} = n \cdot (n - 1),$$

ahonnan n -nel osztva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Megjegyzés. A feladat állítása úgy is teljesül, ha elhagyjuk azt a feltételt, hogy nincs három egy egyenesre eső S -beli pont, ennek bizonyítására most nem térünk ki.

(Pataki János)

4. A konvex $ABCD$ négyszög AB , BC és AD oldalaira teljesül, hogy $AB = AD + BC$. A négyszög belsejében úgy helyezkedik el a P pont, hogy $AP = h + AD$ és $BP = h + BC$, ahol h éppen a P pontnak a CD egyenestől mért távolsága. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

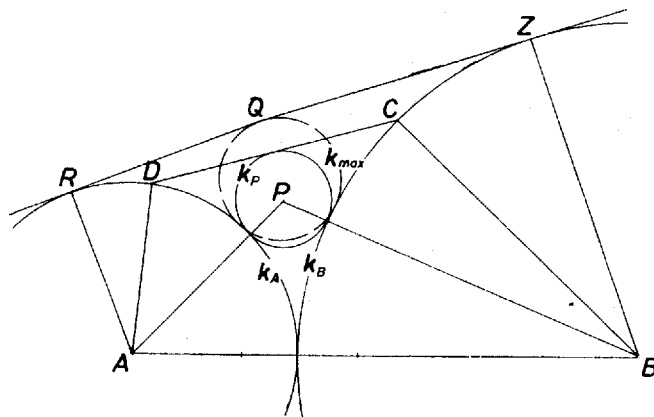
A 2. napon az első nap már elég jól bevált taktikát akartam követni, vagyis a geometria feladattal kezdeni. Az első sikertelen másfél óra után váltottam csak az 5. feladatra. Azt megoldva tértem vissza a 4.-re, és ez „be is jött”.

Az első nehézséget maga az állítás okozta. Mit kezdjek szakaszok négyzetgyökeinek reciprokával? Könnyebben értelmezhetőnek tűnt ehelyett a $\sqrt{AD \cdot BC} \geq \sqrt{h \cdot AD} + \sqrt{h \cdot BC}$ állítást igazolni. Ezeknek a következő geometriai jelentést tulajdoníthatjuk: könnyen ellenőrizhető, hogy $2\sqrt{xy}$ nem más, mint x és y sugarú egymást kívülről érintő körök közös érintőszakasza.

A következő rész cél ilyen körök keresése a négyszögben. Itt sikerült hasznosítanom az első másfél óram eredményeit is. Ez az idő a következő ötletre „ment rá”. Rögzítsük AD , BC hosszát, változtassuk h hosszát, majd egy-egy $((AD; BC; h)$ hármashoz próbáljunk $ABCD$ négyszög(ek)et szerkeszteni.

Mivel $AB = AD + BC$; $AP = AD + h$; $BP = BC + h$, ezért ekkor az ABP háromszög megszerkeszthető. A C pont mértani helye a B körüli, BC sugarú k_B kör, a D ponté a hasonló k_A kör. A CD szakasz pedig érinti a P körüli, h sugarú k_P kört. Megvan a három kör! Annak a feltétele, hogy létrejöjjön legalább egy „jó” $ABCD$ négyszög, az, hogy legyen a k_P körnek olyan érintője, amelynek van közös pontja a k_A és k_B körökkel is, méghozzá úgy, hogy a metszéspontok az AB egyenes P felőli partján legyenek, (hogy a négyszög konvex legyen). Ehhez az nyilván elégséges,

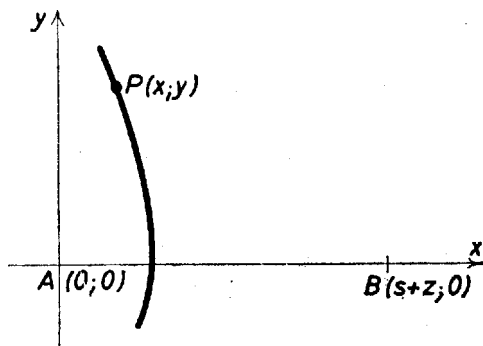
hogy k_P teljesen az AB felőli partján legyen k_A és k_B közös külső érintőinek; legfeljebb érintse. De ez szükséges is, mert ellenkező esetben a következő igaz: a k_A és k_B bármely X , illetve Y pontját összekötve, ez a szakasz a közös érintő alatt AB felé eső részén) halad, így k_P -t csak oly módon érintheti, ha P a létrejövő $XYAB$ négyszög külső pontja.



1. ábra

Az volt az elképzelésem, hogy igazolom a $\sqrt{AD \cdot BC} \geq (\sqrt{AD} + \sqrt{BC})\sqrt{h}$ helyességét. Látható, hogy h változtatásával a bal oldal állandó, a jobb oldal pedig ugyanolyan irányban változik. Ha belátnánk, hogy h maximumakor egyenlőség áll fenn, akkor készen lennénk. Az 1. ábrát tanulmányozva észrevehetjük, hogy ha k_P érinti k_A és k_B közös érintőjét, akkor $RQ = 2 \cdot \sqrt{AD \cdot h}$; $QZ = 2 \cdot \sqrt{BC \cdot h}$; $RZ = 2 \cdot \sqrt{AD \cdot BC}$, és $RQ + QZ = RZ$. Azaz itt egyenlőség áll fenn. Vonzónak tűnik belátni, hogy h erre az esetre maximális. Ekkor már az egyenlőség feltétele is megvan: az $ABCD$ derékszögű trapéz ($ADC \angle = DCB \angle = 90^\circ$). Ezt nem túl elegáns úton sikerült befejezmem. Találhattam volna szebb módot is, de az elkövetkezőkben felhasznált részeredményeim már hamarabb elkészültek, így ez tűnt a leggyorsabb útnak.

Legyen koordinátarendszerünk középpontja az A pont, $A(0;0)$; legyen $AD = s$, $BC = z$ és feltehető, hogy $BC \geq AD$. Mivel $BP - AP = BC - AD = \text{konstans}$, ezért h változtatásával P egy fél hiperbola ágon mozoghat (2. ábra). Ezen látszik, hogy ha x csökken, az y nő (ez az egyenessé torzult hiperbolánál ($AD = BC$) is elfogadható). Belátjuk, hogy h növelésével x csökken (vagy állandó marad, az egyenes esetén), azaz y nő. Így egyre feljebb kerül k_P azon S pontja, amelyre $SP \perp AB$ és S a P fölött van. Ez a pont tehát egyre feljebb kerül, de az érintőnél levő helyzetnél nem mehet tovább. Így valóban az érintőnél lesz h maximális.



2. ábra

Ugyanakkor a $P(x; y)$ pontra $AP = s + h$ azaz

$$(1) x^2 + y^2 = (s + h)^2; BP = z + h, \text{ azaz}$$

$$(2) (s + z - x)^2 + y^2 = (z + h)^2;$$

ezek különbségéből

$$x = \frac{(s + z) + (s - z)(s + z + 2h)}{2(s + z)}.$$

Ez egy elsőfokú függvénye h -nak, és az együtthatója $\frac{s - z}{2(s + z)} \leq 0$; azaz h növelésével y is nő. Vagyis állításunkat beláttuk.

(Benczúr Péter)

5. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -hez található n darab szomszédos pozitív egész szám úgy, hogy egyikük sem egyenlő egy prímszám pozitív egész kitevőjű hatványával.

Egy egész szám pontosan akkor nem prímszám, ha van két relatív prím valódi osztója. Keressük az n darab számot

$$(1) \quad \{2 + M, 3 + M, \dots, (n + 1) + M\}$$

alakban.

Ha $i|M$, $2 \leq i \leq n + 1$ esetén és $M = i \cdot m_i$, akkor

$$i + M = (1 + m_i).$$

Innen látszik, hogy ha még $i|m_i$ is teljesül, akkor

$$(i, 1 + m_i) = 1,$$

és így minden 1-nél nagyobb i -re $i + M$ előáll két 1-nél nagyobb relatív prím szám szorzataként, tehát nem prímszám.

Ha tehát $i^2|M$, $i = 2, 3, \dots, n + 1$, akkor az (1) alatti számok egyike sem prímszám; a talált feltétel pedig biztosan teljesül az $M = [(n + 1)!]^2$ választással. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

(Pataki János)

6. Az $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$ számok egy $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ permutációját nevezzük *jónak*, ha van olyan $i \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$, amelyre $|x_i - x_{i+1}| = n$.

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re az $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$ számok összes permutációjának több mint a fele jó.

A megoldásból talán látható, miért ez a feladat tetszik legjobban az összes közül, hiszen elkerüli a leszámolást vagy a becslést. Eleinte én is becsülgetős, vagy indukciós megoldást akartam adni, azonban mikor ez nem sikerült, és a másik két feladat eléggé felbosszantott, úgy döntöttem, hogy ezt hamar megoldom, ami sikerült is. Eleinte magam sem akartam elhinni, hisz mégis a hatodik – a zsűri által a legnehezebbnek tartott – feladatról van szó, de sokszori átgondolás után sem találtam hibát, így kényszerűen elhittem, hogy elegáns megoldást leltem.

Megadok egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést, mely a nem jó permutációkat leképezi a jók egy részhalmazára.

Minden $1 \leq i \leq 2n$ egész számra az i párjának nevezem azt a k egész számot, melyre $1 \leq k \leq 2n$ és $|i - k| = n$. Így az $1, 2, \dots, 2n$ számokat párokba soroltam.

Tekintem a nem jó $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}$ permutációt. Legyen az x_{2n} párja x_k .

Ekkor e rossz permutáció megfelelője az

$$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{2n}, \dots, x_{2n-1}$$

jó permutáció lesz, hisz $|x_k - x_{2n}| = n$. A nem jó permutációk megfelelői azon jó permutációk lesznek, melyekre

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, 2n - 1\}, \quad \text{hogy} \quad |x_i - x_{i+1}| = n$$

és ezen i -re, $i \neq 2n - 1$, tehát egyetlen szomszédos pár nincs a permutáció végén. Az így kapott jó permutációk mindegyikéből rekonstruálható az eredeti nem jó, tehát a megfeleltetés valóban kölcsönösen egyértelmű.

Ez azt jelenti, hogy a nem jó permutációk száma azonos az előbbi típusú, jó, permutációk számával.

Ezen permutációk pedig kevesebben vannak, mint a jók, hisz az $1, n + 1$ végű jó permutációk nem tartoznak a rosszak közé.

(Fleiner Tamás)