Az, hogy az $f(x)=x$ egyenletnek nincs valós gyöke, azt jelenti, hogy a $g(x)=f(x)-x$ függvény képe nem metszi az x tengelyt. Mivel $g(x)$ is másodfokú függvény, ez csak úgy lehet, ha $g(x)$ képe minden valós x-re az x tengelynek ugyanazon az oldalán van, tehát $g(x)$ vagy pozitív minden x-re, vagy negatív minden x-re. Az első esetben

$$f(x)>x \tag{1}$$

teljesül minden valós x-re. Legyén a tetszőleges valós szám, és helyettesítsük (1)-be először az $x=a$, majd az $x=f(a)$ értékeket. Kapjuk, hogy $f(a)>a$, és $f\big(f(a)\big)>f(a)$, tehát $f\big(f(a)\big)>a$ minden valós a-ra. Így az $f\big(f(x)\big)=x$ egyenletnek valóban nincs gyöke a valós számok körében. A második esetben

$$f(x)<x \tag{2}$$

minden x-re, tehát $f(a)<a$, $f\big(f(a)\big)<f(a)$ minden a-ra, amiből $f\big(f(a)\big)<a$ következik, tehát az $f\big(f(x)\big)=x$ egyenletnek ebben az esetben sincs valós gyöke.

Megjegyzés. Az $f(x)$ függvényről csak annyit használtunk fel a megoldásunkban, hogy ha $f(x)-x$ képe nem metszi az x tengelyt, akkor annak egyik oldalán marad. Nem szerepel az iskolai anyagban, de az analízisben jól ismert állítás, hogy ez mindig így van, ha $f(x)$ folytonos és az értelmezési tartománya véges vagy végtelen intervallum.