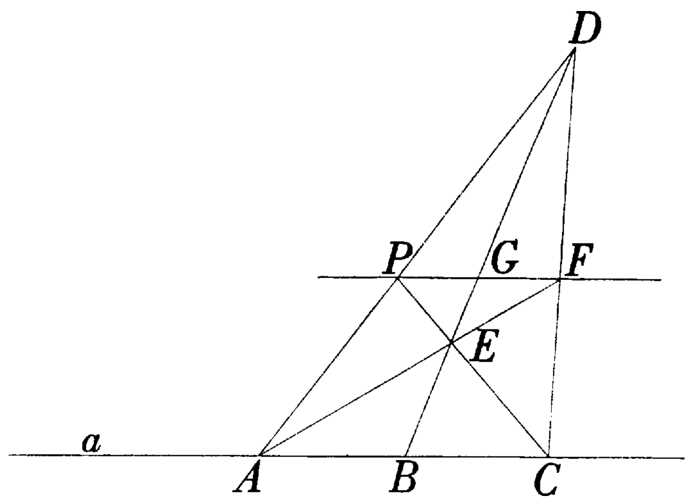
D. Hilbert 1899-ben a göttingai *Gauss– Weber* emlékmű leleplezése alkalmából megjelent „Grundlagen der Geometrie” c. híres ünnepi iratában mellesleg azokkal a szerkesztésekkel is foglalkozott, amelyek megoldásához a vonalzón kívül csak *hosszátvivő*, vagyis oly eszköz kell, amely tetszés szerinti vonaldaraboknak egyik egyenesről tetszés szerinti más egyenesre való átrakását teszi lehetővé, [1] és megmutatta, hogy minden körzővel és vonalzóval megszerkeszthető szabályos sokszög vonalzóval és hosszátvivővel is megszerkeszthető kell, hogy legyen.

A következőkben a szabályos ötszög vonalzóval és hosszátvivővel való szerkesztését mutatjuk meg.

Evégből először néhány szerkesztési alapfeladatot kell vonalzóval és hosszátvivővel megoldanunk. E feladatok a következők:

1. feladat. *Húzzunk adott ponton át adott egyenessel párhuzamos egyenest.*



1. ábra

Megoldás: Kössük össze az adott P pontot az adott a egyenes tetszés szerinti A pontjával (1. ábra) és mérjük rá az adott egyenesre az egymással egyenlő AB és BC távolságot. Vegyünk fel AP meghosszabbításán egy D pontot és kössük össze B-vel és C-vel. Ha a CP egyenes BD-t E-ben és az AE egyenes CD-t F-ben metszi, akkor PF lesz a keresett egyenes.

Valóban, ha a BD, CD és AE egyenesek a P ponton át a-val párhuzamosan rajzolt egyenest a G, F és F' pontban metszik, akkor

$$PG : GF = AB : BC$$

és

$$PG : GF' = BC : AB = AB : BC,$$

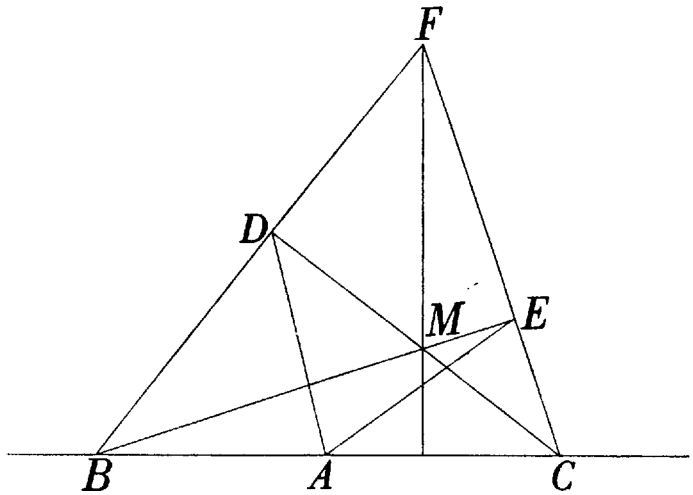
amiből következik, hogy az F és F' pontok egybeesnek, s így a P-ből a-val párhuzamosan húzott egyenes átmegy AE és CD metszéspontján.

2. feladat. *Rajzoljunk adott egyenesre merőleges egyenest.*

Megoldás: Mérjük rá az adott egyenesre, annak egy tetszés szerinti A pontjától mindkét irányban az egymással egyenlő AB és AC távolságot (2. ábra), azután határozzuk meg az A ponton átmenő másik két egyenesen, AB-nek ugyanazon oldalán, a D és E pontokat úgy, hogy $AD = AE = AB$ legyen. Akkor a BD és CE egyenesek metszik egymást egy F pontban, a BE és CD egyenesek pedig egy M pontban és az FM egyenes merőleges AB-re.

---

[1] *Kürschák József* 1902-ben a Mathematische Annalen 55. kötetében megjelent dolgozatában továbbmenve azt is megmutatta, hogy minden szerkesztési feladat, melyet vonalzóval és hosszátvivővel megoldhatunk, akkor is elvégezhető, ha a hosszátvivőt egy *alapmérték*-kel helyettesítjük, vagyis oly eszközzel, mely csak egy bizonyos, az eszköz által megszabott hosszúságnak (mondjuk a hosszegységnek) az átrakására alkalmas.

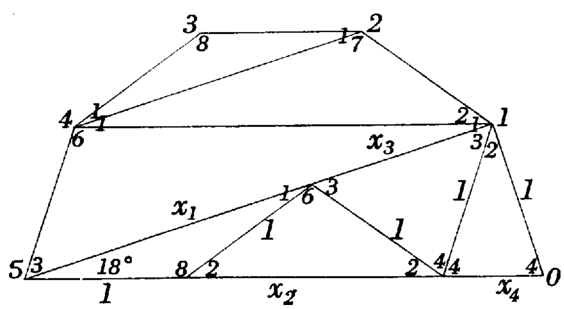


2. ábra

Valóban, a $BDC\sphericalangle$ és $BEC\sphericalangle$, mint a BC fölé írt félkörben az átmérőn nyugvó kerületi szög, derékszög. Ennélfogva M a BCF háromszög magasságpontja, és így FM merőleges BC-re.

E két feladat alapján könnyen lehet adott egyenesre, ennek adott pontjában merőlegest emelni és adott egyenesre kívüle fekvő ponton át merőlegest szerkeszteni, s így távolságot is felezni.

Térjünk át ezek után a szabályos ötszög megszerkesztésére. E végből tekintsük az egységnyi oldalú szabályos tízszöget (3. ábra), melynek csúcsait a *0, 1, 2, …, 9* számokkal jelöljük. Az *51, 14, 42* átlók a tízszög egyik felét négy háromszögre osztják.



3. ábra

Az ábrán feltüntettük e háromszögek szögeinek $180^\circ : 10 = 18^\circ$-ra mint szögegységre vonatkozó mérőszámait. Ha a négy háromszöget úgy helyezzük egymásra, hogy ezen szögük szárai egybeessenek, akkor a *145, 412* és *243* háromszögeknek a közös szöggel szemben fekvő oldalai a *015* derékszögű háromszöget négy egyenlő szárú háromszögre osztják, melyeknek szárai egységnyi hosszúságúak. E háromszögek alapját az ábrán látható módon x_1, x_2, x_3 és x_4-gyel jelöljük. Az x_1 és x_4 alapú háromszöget az alaphoz tartozó magassága olyan derékszögű háromszögekre osztja, melyeknek átfogója egységnyi hosszúságú, egyik szöge 18°, e szög mellett fekvő befogója x_1, és a vele szemben fekvő befogója x_4 felével egyenlő; az x_4 alapú háromszög magassága tehát x_1 felével egyenlő, és viszont. Hasonló módon láthatjuk be, hogy az x_3 alapú háromszög magassága x_2 felével egyenlő és viszont. Az ábra alapján továbbá

$$1 : \frac{1}{2}x_1 = x_1 : \left(1 + \frac{1}{2}x_2\right),$$

azaz

$$x_1^2 = 2 + x_2;$$

hasonló módon:

$$1:\frac{1}{2}x_1 = x_2 : \frac{1}{2}(x_1+x_3),$$
$$x_1x_2 = x_1 + x_3;$$
$$1:\frac{1}{2}x_1 = x_3 : \frac{1}{2}(x_2+x_4),$$
$$x_1x_3 = x_2 + x_4;$$
$$\dots$$
$$x_1 : \left(1+\frac{1}{2}x_2\right) = x_2 : \frac{1}{2}(x_1+x_3)$$
$$x_2^2 = x_1^2 + x_1x_3 - 2x_2$$
$$= 2 + x_4;$$
$$\dots .$$

Ily módon a következő szorzótáblát kapjuk:

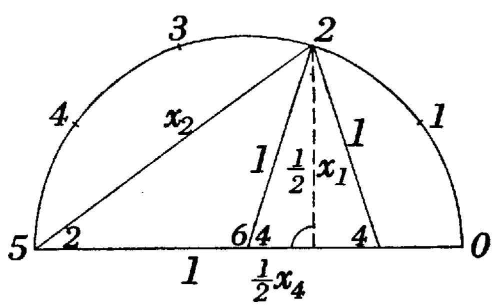
	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$2+x_2$	x_1+x_3	x_2+x_4	x_3
x_2	x_1+x_3	$2+x_4$	x_1	x_2-x_4
x_3	x_2+x_4	x_1	$2-x_4$	x_1-x_3
x_4	x_3	x_2-x_4	x_1-x_3	$2-x_2$

Az x_2 és x_4 alapú háromszögekből összeállítható a 4. ábrán látható egyenlő szárú háromszög, amelyből

$$1 + x_4 = x_2$$

és így

$$x_2 - x_4 = 1.$$



4. ábra

A szorzótáblából pedig

$$x_2x_4 = x_2 - x_4 = 1.$$

Így a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti ismert összefüggés szerint x_2 és $-x_4$ az

$$x^2 - x - 1 = 0$$

egyenlet gyökei:

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4},$$
$$x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4}.$$

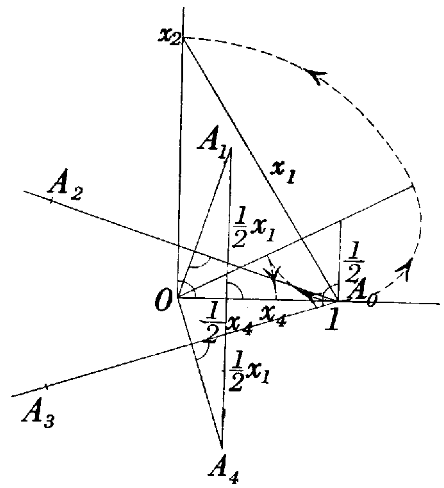
A szorzótábla szerint továbbá:

$$x_1^2 - x_2^2 = x_2 - x_4 = 1,$$

és így

$$x_1 = \sqrt{1+x_2^2}.$$

Adott körbe írt szabályos ötszög szerkesztése ennélfogva a következő:



5. ábra

Legyen O az adott kör középpontja és A_0 a kör kerületének egy pontja (5. ábra). Az A_0 pontban merőlegest állítunk OA_0-ra és rámérjük a hosszegységnek választott OA_0 körsugár felét. Az így kapott pontot O-val összekötő egyenesdarabból levágjuk a hosszegység felét; ezzel megkaptuk x_4-et, amelyet rámérünk az OA_0 egyenesre O-tól A_0 felé. A hosszegységből és annak feléből szerkesztett derékszögű háromszög átfogóját a hosszegység felével meghosszabbítva megkapjuk x_2-t, melyet rámérünk az O pontban OA_0-ra emelt merőlegesre. Az így kapott pontot A_0-val összekötő egyenesdarab x_1-gyel egyenlő. Ha ennek felét az O-tól $\frac{1}{2}x_4$ távolságban OA_0-ra merőlegesen húzott egyenesre OA_0-tól számítva mindkét irányban rávisszük, akkor a keresett ötszög A_1 és A_4 csúcsát kapjuk, hiszen az OA_1A_4 szög koszinusza $\frac{1}{2}x_1$, tehát a 3. ábra szerint $OA_1A_4\sphericalangle = 18°$. Az ötszög hátralevő két csúcsa, A_2 és A_3 az A_0 pontnak az OA_1 és OA_4 egyenesekre vonatkozó tükörképe, amelyet meg tudunk szerkeszteni.

Szerkesztésünk annak a felismerésén alapul, hogy adott körbe írt szabályos csillagötszög oldala ugyanazon körbe írt szabályos tízszög oldalából és a kör sugarából mint befogókból szerkesztett derékszögű háromszög átfogójával egyenlő.