Ez az előadás 1988. december 27-én hangzott el az Ifjúsági Matematikai Kör Téli Ankétján. A szövegben általában meghagytuk az élőbeszéd fordulatait.

Kiindulásként az Amerikai Egyesült Államok elnökválasztásáról akarok beszélni. Aki olvassa az újságokat, az tudja, hogy ott valójában elektorok kerülnek megválasztásra, s az elektorok választják meg az elnököt. Az elektorok száma 538, – hogy miért pont ennyi, arra majd később visszatérek. Nézzük meg először, hogy milyen is ez a választási rendszer, s aztán meglátjuk, mi benne a matematikai probléma.

Az Egyesült Államok szövetségi állam, jelenleg 50 állam szövetsége. Eredetileg, amikor megalakult, 13 szövetségi állam volt. Az alapító 13 állam elfogadta az alkotmányt, amiben két szempont érvényesült a Szövetségi Kongresszus létszámát illetően. Volt egy olyan nézet az államok között – ezt elsősorban a nagyobbak mondták –, hogy a jogos az, hogy az egyes tagállamok a lakosság arányában küldjenek képviselőt. Nagyobb állam nagyobb súllyal legyen képviselve a Kongresszusban. A másik nézet – ez főleg a kisebb államok nézete volt –, hogy minden állam egyenjogú, mindegyik ugyanannyi képviselőt küldjön. A vitát végül is bölcsen úgy oldották meg, hogy a Kongresszusnak két háza van: a Szenátus – ez olyan felsőházféle –, oda minden állam két úgynevezett szenátort delegál, így jelenleg 100 tagja van; a másik a Képviselőház – alsóház jellegű –, oda viszont az egyes tagállamok a lakosságuk arányában küldenek képviselőket. Jelenleg 435 tagja van. Ennek a két számnak az összege jól láthatóan nem 538, hanem 535. A különbség abból adódik, hogy a főváros – Washington – nem tartozik egyik államhoz sem, de rendelkezik 3 elektorral, akik nem vesznek részt sem a Szenátusban, sem a Képviselőházban. Mivel minden egyes államnak annyi elektora van, mint szenátora és képviselője együtt, így adódik eredményül 538. Az még mindig nem világos, hol itt a matematikai probléma.

A szenátorok számával semmi probléma nincs. A probléma az, hogyan határozzák meg, hogy az egyes államok hány képviselőt küldjenek a Képviselőházba. A képviselők száma, amint mondtam, arányos az államok lakosságainak a számával. Egyébként megjegyzem: azt, hogy az egyes államoknak mennyi a lakossága, 10 évenként népszámlálással állapítják meg, mégpedig mindig 10-zel osztható évben. (A jelenlegi választás az 1980-as népszámlálás adatain alapult.)

Legyen az egyes államok lakóinak száma p_1, p_2, …, p_s, ahol s az államok száma (jelenleg $s = 50$, de mi általánosabban akarjuk megfogalmazni a problémát), a képviselők száma h. A j-edik állam lakosságszámának aránya az összlakosság számához $\frac{p_j}{\sum p_i}$, tehát $\frac{p_j}{\sum p_i}h$ képviselőt jogosult küldeni arányos képviselet esetén. Jelöljük ezt q_j-vel és nevezzük az illető állam kvótájának. Egy kis bökkenő van: ez általában nem egész szám, márpedig törtszámú képviselőt elég nehéz lenne delegálni. A feladat most már világos.

Ha az egyes államok kvótája q_1, q_2, …, q_s és $\sum_{i=1}^{s} q_i = h$, de a q-k nem egész számok, a q-k helyett olyan egész számokat kell választani 1-től s-ig, amelyek a legigazságosabban közelítik meg ezeket a q arányokat (kvótákat).

Aki járatlan az ilyen problémákban, azt mondhatná, hogy kerekítsünk minden egyes q-t egészre úgy, hogy ha törtrésze 1/2-nél kisebb, akkor lefelé, ha 1/2-nél nagyobb, akkor felfelé. (Hogy mit csinálunk, ha éppen 1/2, az mellékes kérdés).

Talán nézzünk egy példát, hogy ez a megoldás miért nem megfelelő.

Tegyük fel, hogy van 5 államunk, mind az ötnek a kvótája 10,6. Ezek összege 53, tehát a képviselőháznak 53 tagja lesz. Ha viszont mindegyiket felfele kerekítjük, akkor az összeg $11 \times 5 = 55$, így tehát 55 képviselő lenne.

Ha az zavarna minket, hogy a kvóták pont egyenlők, tekinthetünk egy hasonló példát, amelyben a kvóták már nem egyenlők. Megint 5 állam legyen és a kvótáik:

10,62   10,61   10,60   10,59   10,58.

Itt is, ha felfelé kerekítünk, akkor mindegyik 11-et kap, az pedig 55 képviselő. Ez így tehát nem jó!

Hasonló a helyzet, ha a kvóták a következők:

10,42   10,41   10,40   10,39   10,38

(ez az előző eset „testvér párja”).

Ezek összege 52, ha pedig mindegyiket lefele kerekítem, akkor mindegyik 10 képviselőt kap, ezek összege pedig csak 50. Azt tehát nem értelmes mondani, hogy minden számot kerekíteni kell, mert így megeshet, hogy több, vagy kevesebb képviselő lesz, mint amennyit szeretnénk. Mit kell tehát csinálni? Mindenki, aki némi matematikai rutinnal rendelkezik, könnyen találhat választ erre a kérdésre. Minden állam kapja meg az ő egész részének megfelelő számú képviselőt, példánkban mindegyik állam 10-et, a fennmaradó 3 képviselői helyet az a 3 állam kapja, amelyiknek a törtrésze a legnagyobb, azaz a mi első példánkban a 10,62 10,61 és 10,60. Második példánkban pedig a két képviselői helyet a 10,42 és a 10,41 kvótájú állam kapja.

Világos tehát az algoritmus. Ha q_i egész, akkor annak az államnak pontosan q_i darab képviselője lesz. Ha q_i nem egész, akkor van egy alsó egész része, erre a szokásos jelölés $\lfloor q_i \rfloor$, (ennyi képviselőt biztosan megérdemel ez az állam) és van egy felső egész része, amit így jelölünk: $\lceil q_i \rceil$. E két szám a q_i-t éppen közrefogja. Tehát minden államnak $\lfloor q_i \rfloor$

számú képviselő legalább, és legfeljebb $\lceil q_i \rceil$ számú képviselő jár. Ezután sorra vesszük a törtrészeket nagyság szerint, és a fennmaradó helyeket ezek között osztjuk ki, amelyiknek még jut. Nyilván ez a megfelelő módszer. Igaz? Ilyen egyszerű dologgal már rég találkoztunk, akkor ugye be is fejezhetem az előadást? Talán egy kicsit még örvendezzünk, hogy milyen remek módszert találtunk és nézzünk még egy, lényegesen reálisabbnak tűnő példát.

Legyen megint az egyszerűség kedvéért 5 államunk. Az összlakosság száma 26 000.

Állam	Lakosság	$h = 25$	$h = 26$	$h = 27$
A	9 061	8,712	9,061	9,410
B	7 179	6,903	7,179	7,455
C	5 259	5,057	5,529	5,461
D	3 319	3,191	3,319	3,447
E	1 182	1,137	1,182	1,227
	26 000	25	26	27

1. táblázat

Az államban mondjuk az a nézet uralkodik, hogy 1000 emberenként legyen egy képviselő. Úgy képzelik, lesz egy képviselőházuk kb. 26 (esetleg 25 vagy 27) képviselővel. Nézzük meg, melyik esetben mi történik. Legyen egyelőre 25 képviselő. Számítsuk ki az egyes államok kvótáit a már említett $\frac{p_j}{\sum p_i} h$ alapján. Eszerint az első állam kvótája $q_1 = \frac{9061}{26\,000} \cdot 25 = 8{,}712$ és így tovább $q_2 = 6{,}903$, $q_3 = 5{,}057$, $q_4 = 3{,}191$, $q_5 = 1{,}137$ (1. táblázat). Azaz az egyes államoknak sorban 8, 6, 5, 3, 1 képviselő jár, s mivel 25 képviselő van, marad még 2 szabad hely, s ezt az a kettő kapja, amelyiknek legnagyobb a törtrésze, azaz a képviselők száma így 9, 7, 5, 3, 1 lesz. Most nézzük azt az esetet, ha 26 fős a képviselőház. Ekkor a kvóták 9,061, 7,179, 5,259, 3,319, 1,182, az államoknak rendre 9, 7, 5, 3, 1 képviselő jut biztosan, s mivel ezek összege 25, a maradék 1-et megint annak adjuk, akinek a törtrésze legnagyobb, azaz most a képviselők száma sorban 9, 7, 5, 4, 1. Végül 27-re a kvóták 9,410, 7,455, 5,461, 3,447, 1,227, és így a képviselők száma: 9, 8, 6, 3, 1. Hogy is van ez? Itt valami furcsa dolog történt. A D államnak 26 képviselőből 4 jár, 27-ből azonban csak 3-at kap !

Ezek szerint mégsem olyan remek ez a módszer! Ez a felismerés konkrétan megtörtént az Egyesült Államok története során és *Alabama paradoxon*-nak hívják (Alabama a déli államok egyike). Az 1880-as népszámlálás után vették észre, hogy ha a Képviselőház 299 tagú lenne, akkor Alabamának 3 képviselő jutna, ha viszont 300 képviselő van, akkor Alabama államnak csak 2 képviselő jut. Emiatt hívják Alabama-paradoxonnak. Ekkor még sikerült megoldani a problémát úgy, hogy annyi képviselőt választottak, hogy Alabama se járjon rosszul.

Az 1900-as népszámlálás után Colorado államnak támadt problémája. Egy erre illetékes törvényhozási bizottság azt javasolta, hogy a Képviselőháznak 357 tagja legyen. Mire a coloradói képviselő számításait lobogtatva a következőket mondta el: Ha a Képviselőház tagjainak száma 350 és 400 között van (ez ugye 51 lehetőség), akkor ebből 50 esetben Coloradonak mindig 4 képviselője van, csak abban az 1 esetben, amikor a képviselők száma éppen 357, lesz az államnak mindössze 3 képviselője. Maine állam képviselője még furcsább jelenség miatt szólalt fel: Az 1890-es népszámlálás után Maine államnak 4 képviselője volt, s most (1900 után) így alakulna a helyzet: ha a képviselő testület mérete h, akkor Maine állam képviselőinek száma a:

h	382	383, 384, 385	386	387, 388	389, 390
a	3	4	3	4	3

és az ennél nagyobbaknál már megint 4.

Azt a módszert, amelyet mi az előadás korábbi részében, legkézenfekvőbbnek találtunk, Amerikában *Vinton*-módszer néven ismerték. 1850-től 1900-ig ezt a Vinton-módszert alkalmazták (eredetileg egy Vinton nevű képviselő javasolta, és mindenki elfogadta természetes módszernek).

Fogalmazzuk meg, hogy tulajdonképpen mi is a baj ezzel a módszerrel. A probléma az, hogy a módszer nem monoton, vagy úgy is mondhatnánk nem „ház"-monoton. A választási rendszertől ugyanis elvárnánk, hogy monoton legyen, ami azt jelenti, hogy ha a lakosság száma nem változik, de az összes képviselők száma nő (1-gyel, vagy akárhánnyal), akkor minden egyes államból legalább annyi képviselő jusson a Képviselőházba, mint eddig.

Valami új módszert kell tehát keresni. Mielőtt ezt megtennénk, beszéljünk még egy kicsit erről a Vinton módszerről. Az ott szereplő kvótát, amiről eddig beszéltünk és felírtuk az alsó meg felső egész részét, azt természetesen Nagy-Britanniában egészen másképp hívják, mint az Egyesült Államokban. Ott egy *Hare* nevű ügyvéd után, – aki 1850 körül publikált egy könyvet arról, hogy a választások alapján mi a helyes képviselői arány –, Hare minimum, illetve maximumnak nevezték el a szóban forgó alsó, ill. felső egész részt. Néhány év múlva egy *Droop* nevű másik ügyvéd a következő észrevételt tette.

Az egyszerűség kedvéért most csak egy állammal foglalkozunk. Tegyük föl, hogy választás van, számos jelölt indul és közülük h kerül megválasztásra, az összes szavazatok száma v. Aki legalább $\frac{v}{h}$ szavazatot kap, annak nyilván dukál egy hely. (Ha éppen h jelölt lenne és mindegyik ugyanannyi szavazatot kapna, akkor az éppen $\frac{v}{h}$ szavazat, és ekkor nyilván mindegyik jelölt megválasztásra kerül.) Erre Droop a következőket mondta: ha sok jelölt van és van olyan, aki határozottan több, mint $\frac{v}{h+1}$ szavazatot kap $\left(\text{ami nagy számok esetén általában sokkal kisebb, mint a } \frac{v}{h}\right)$, az is teljes joggal követelheti, hogy megválasszák. Hiszen maximum h olyan jelölt lehet, akire több, mint $\frac{v}{h+1}$ szavazat jut. Ha ugyanis $(h+1)$ lenne, akkor a szavazatok száma összesen nagyobb lenne v-nél. Most alkalmazzuk ezt a gondolatmenetet arra a szituációra, amit nézünk, hogy tehát hány képviselője legyen egy államnak. Ha az államnak több, mint $a \cdot \frac{v}{h+1}$ lakosa van (ez persze nem „szavazás”, hanem megszámolják a lakosokat), akkor az állam biztosan jogosult legalább a képviselőre. Az igazság az, ha egyenlőség van, még akkor is jogosult a képviselőre, kivéve egy egészen kivételes kellemetlen esetet, ha mindegyik állam lakossága $\frac{v}{h+1}$-nek éppen egész számú többszöröse, mert akkor együtt pont $(h+1)$ képviselőre lennének jogosultak, holott a képviselő testület csak h tagú. Dehát ez józszerével sohasem fordul elő nagy számok esetén, ha pedig mégis előfordulna, alighanem legokosabb lenne $(h+1)$-re emelni a képviselők számát, és akkor minden államnak éppen egész kvótája lenne.

Most nézzünk egy példát arra, hogy a Vinton-módszer még a Droop minimumot sem elégíti ki.

Legyen 3 államunk:

Államok	Szavazatok száma(v)	Hare kvóta	Droop kvóta	Helyek h
A	985	98,50	99,48	98
B	8	0,80	0,81	1
C	7	0,70	0,71	1
	1000	100,00	101,00	100

2. táblázat

ahol a Hare kvóta $\frac{p_i}{\sum p_i}h$, a Droop kvóta $\frac{p_i}{\sum p_i}(h+1)$.

A Vinton-módszer szerint a képviselők száma 98, 1, 1, holott a Droop-féle argumentum azt mutatja, hogy az A állam jogosult legalább 99 helyre. Ez egy újabb fogyatékossága a Vinton-módszernek.

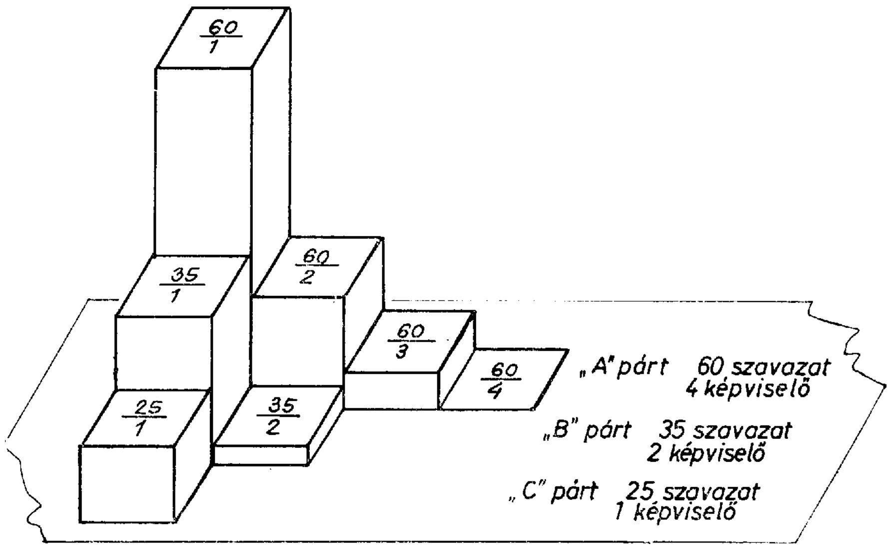
Erre külön-külön rájöttek az Egyesült Államokban és Nagy-Britanniában is.

Most térjünk vissza Európába, ahol az 1880-as években egy *d'Hondt* nevű belga professzor szintén azt vizsgálta, hogyan lehet igazságosan szétosztani mondjuk a pártok között a képviselői helyeket a szavazatok arányában, ami matematikailag ugyanaz, mintha az államok között osztják el a képviselői helyeket a lakosság arányában.

Ezt megint egy egyszerű eseten illusztrálom. Van három pártunk A, B, C, szavazataik száma rendre $v_1 = 60$, $v_2 = 35$, $v_3 = 25$. A megfelelő képviselők száma a_1, a_2, a_3, ahol $a_1 + a_2 + a_3 = h$. Tegyük fel, hogy egy újabb képviselői helyet akarunk szétosztani, akkor az igazságos elosztás az, hogy megnézzük, hogy a

$$\frac{v_1}{a_1+1}, \qquad \frac{v_2}{a_2+1}, \qquad \frac{v_3}{a_3+1}$$

törtek közül melyik a legnagyobb, és az a párt kap még egy képviselői helyet. Ezek a törtek rendre azt fejezik ki, hogy minden párt ennyi szavazóként kapna egy helyet, feltéve, hogy az új képviselői helyet annak a pártnak adnánk. A módszernek nyilvánvaló pozitívuma, hogy ház-monoton. Induljunk ki abból, hogy egyik pártnak sincs még 1 képviselője sem.



Az 1. ábra illusztrálja, hogy pl. 7 képviselői hely hogy kerülne elosztásra. Az első hely nyilván az A pártnak jutna. $\frac{35}{1} > \frac{60}{2}$ miatt a második hely a B pártnak jut, de $\frac{60}{2} > \frac{25}{1}\left(> \frac{35}{2}\right)$ miatt a harmadik hely ismét az A pártnak, $\frac{25}{1} > \frac{60}{3}\left(> \frac{35}{2}\right)$ miatt a negyedik hely a C pártnak stb.

A legtöbb nyugat-európai országban a mai napig lényegében ezzel a módszerrel történik a képviselői helyek szétosztása, feltéve hogy „listás" szavazásról van szó (tehát a szavazók pártokra és nem név szerinti jelöltekre szavaznak). Tulajdonképpen ezt a módszert már 1790-ben javasolta *Thomas Jefferson*, a Függetlenségi Nyilatkozat megfogalmazója, aki később az Egyesült Államok harmadik elnöke lett.

Nézzünk most egy egyszerű példát arra, hogy ez a módszer sem tökéletes. Legyen 6 képviselői hely, és a kvóták a következők:

$$2{,}85, \quad 0{,}65, \quad 0{,}64, \quad 0{,}63, \quad 0{,}62, \quad 0{,}61.$$

Az nyilván nem számít, mennyi az abszolút szavazatok száma, csak az egymáshoz való arányuk számít, ezért elegendő csak a kvótákat nézni. Alkalmazva a d'Hondt-módszert $\frac{2{,}85}{1}$ a legnagyobb, ez a párt kapja tehát az első, de még a második, harmadik, negyedik képviselői helyet is, hiszen $\frac{2{,}85}{4} > \frac{0{,}65}{1}$. Mivel $\frac{2{,}85}{5} < 0{,}6$, az ötödik helyet már a 0,65 kvótájú párt kapja, a hatodikat pedig a 0,64 kvótájú. A helyek elosztása tehát 4, 1, 1, s a többi három párt nulla képviselői helyet kap.

Két dolog tűnik azonnal szemünkbe:

1. A módszer nem elégíti ki azt a követelményt, hogy minden párt (állam), akit arányosan képviselni akarunk, az a felső egész részét kapja legfeljebb.

2. A módszer eléggé kedvez a nagyobb pártoknak.

Most nézzünk egy másik példát. Van 33 állam, adatainkat a következő 3. táblázat tartalmazza.

Állam	Népesség	Kvóta	LO	HK	EA	AK	MO	Q
1	60 272	61,477	49	64	68	70	70	62
2	1 226	1,251	1	1	1	1	1	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	1 236	1,261	1	1	1	1	1	1
13	1 237	1,262	2	1	1	1	1	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
25	1 249	1,274	2	1	1	1	1	1
26	1 250	1,275	2	1	1	1	1	2
27	1 251	1,276	2	1	1	1	1	2
28	1 252	1,277	2	2	1	1	1	2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
31	1 255	1,280	2	2	1	1	1	2
32	1 256	1,281	2	2	2	1	1	2
33	1 257	1,282	2	2	2	1	1	2
	100 000	102,000	102	102	102	102	102	102

3. táblázat

Van egy nagylétszámú állam 60 ezer feletti lakossal. A többieknek majdnem ugyanannyi lakosa van, mindegyiknek 1-gyel több, mint az előzőnek. A lakosság összlétszáma 100 000. A Képviselőház 102 tagú, a kvótákat a 3. oszlopban láthatjuk. Mi most egyelőre az utolsó előtti MO („maximális osztó”) jelű oszloppal foglalkozunk. (Mindjárt megtudjuk, miért „maximális osztó”.) Az MO jelű oszlopban az van feltüntetve, hogy a d'Hondt-módszert alkalmazva az egyes államok hány képviselői helyet kapnak. Ez a módszer a legnagyobb létszámú államnak 70 képviselői helyet juttat (tehát sokkal többet, mint a kvóta felső egész része: 62), a többinek egyet-egyet. Most nézzük, milyen is ez a d'Hondt-módszer. Valójában ez egy osztós módszer. Az i-edik párt v_i szavazatot kapott, és sorban kezdjük kiosztani a képviselői helyeket. Már h képviselői helyet kiosztottunk és az i-edik pártnak eddig a_i képviselői helye van, akkor a módszer szerint vizsgálnunk kell a $\dfrac{v_i}{a_i+1}$ törteket, és amelyik államra ez a *legnagyobb*, az kapja a következő képviselői helyet. Tehát egy $d(a)$ függvényt használtunk (konkrétan $d(a) = a+1$-et) és annak a pártnak adtuk a következő képviselői helyet, amelyre $\dfrac{v}{d(a)}$ a legnagyobb volt. Láttuk, hogy ez a módszer nem tökéletes, p1. a nagylétszámú pártokat előnyben részesíti. 1920 körül a Harvard egyetem professzora, *Huntington* felvetette azt a kérdést, hogy más $d(a)$ osztókat használva nem kapnánk-e jobb eredményt. Akármilyen d-t választunk, az biztos, hogy ház-monoton módszert kapunk. Könnyű arra is rájönni, hogy a $d(a)$ osztónak tanácsos valahol a és $a+1$ között lennie. Eléggé nevetséges lenne egy olyan módszer, ami csupa egész kvóta esetén – tehát amikor kezdettől fogva nem volt tulajdonképpen semmi probléma – nem ezeket a kvótákat adná meg, mint a képviselői helyek számát. Mármost igaz a következő: ha d olyan, hogy

$$a < d(a) \leqq a+1$$

teljesül minden a-ra, vagy pedig d olyan, hogy

$$a \leqq d(a) < a+1$$

teljesül minden a-ra, akkor a $d(a)$ osztóval dolgozó módszer egész kvóták esetén a kvótákat adja a képviselői helyek számaként.

Milyen $d(a)$-k jöhetnek szóba? Lehet ez $a+1$ (ez a legnagyobb, innen a „maximális osztó” elnevezés), lehet a : ez a legkisebb osztó, ezért LO-val jelöljük. Ez erősen favorizálja a kis államokat, ahogy azt a 3. táblázatból kiolvashatjuk. A legnagyobb pártnak viszont ott csak 49 képviselőt juttat. Lehet még $a+\dfrac{1}{2} = \dfrac{a+(a+1)}{2}$, a számtani közepük, ezt AK-val jelöltük („aritmetikai közép”). Lehet a geometriai közepük: $\sqrt{a(a+1)}$, ezt EA-val jelöltük, majd kiderül miért, és a harmonikus közepük, ami a reciprokaik számtani közepének a reciproka:

$$\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+1}}{2}} = \frac{2a(a+1)}{2a+1}$$

Ezek nagyság szerinti sorrendje

$$a+1 > a+\frac{1}{2} > \sqrt{a(a+1)} > \frac{2a(a+1)}{2a+1} > a.$$

A táblázatból láthatjuk, hogy minél kisebbek az osztók, annál jobban kedvez a módszer a kis szavazatszámú pártoknak.

Most megmagyarázom, miért EA-val jelöljük a geometriai közepet. Azért mert az „egyenlő arány”-nak a rövidítése akar lenni. Ez az a módszer, amely jelenleg az amerikai Képviselőházban használatos. Huntington bölcsen nem „geometriai közép módszer”-nek hívta ezt a módszert; ezzel a névvel kevés esélye lett volna. Az „egyenlő arányok módszere” elnevezés viszont, úgy tűnt, legjobban megfelel az alkotmány szellemének és a legigazságosabb. Még így sem volt könnyű az új módszer bevezetését elérni. Mikor 1900-ban botrányokba fulladt a Vinton-módszer, akkor kezdtek el új módszert keresni. 1910-ben és 30-ban az aritmetikai közép-módszert alkalmazták. (Az 1920-as népszámlálás megbízhatóságát sokan vitatták, végül nem került sor a képviselői helyek újraelosztására.) Csak 1941-ben írta alá Roosevelt elnök azt a törvényt, ami szerint mostantól kezdve az egyenlő arányok módszere kerül alkalmazásra.

Itt megint álljunk meg. Az egyenlő arányok módszere szemlátomást rossz. Például nem elégíti ki azt a nyilvánvalóan kívánatos feltételt, hogy ha egy állam kvótája 61,5, akkor vagy 61 vagy 62 képviselője legyen, de semmi esetre sem 68. (3. táblázat). Ha valaki azt hiszi, hogy ennek a módszernek az a jellegzetessége, hogy néha esetleg túllépi a felső egész részt, de más baja nincs, az most itt láthat egy másik példát (4. táblázat).

Állam	Népesség	Kvóta	LO	HK	EA	AK	MO	Q
1	68 010	66,650	58	58	60	64	78	67
2	1 590	1,558	2	2	1	1	1	1
3	1 591	1,559	2	2	1	1	1	1
4	1 592	1,560	2	2	2	1	1	1
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	1 595	1,563	2	2	2	1	1	1
8	1 596	1,564	2	2	2	2	1	1
9	1 597	1,565	2	2	2	2	1	1
10	1 598	1,566	2	2	2	2	1	2
11	1 599	1,567	2	2	2	2	1	2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
21	1 609	1,577	2	2	2	2	1	2
	100 000	98,000	98	98	98	98	98	98

4. táblázat

Ezúttal 21 államunk van, a lakosság összlétszáma most is 100 000. A táblázat mutatja, hogy az egyes osztó-módszereket alkalmazva az egyes államoknak hány képviselői hely jut. Az egyenlő arányok módszere most csak 60 képviselőt biztosít a legnagyobb államnak, amelynek a kvótája pedig 66,5 fölött van.

Elemezzük kicsit ezeket az osztó-módszereket. Van egy argumentum, ami azt mutatja, hogy más $d(a)$ osztó nem jön szóba. Tehát nem csak arról van szó, hogy mi ezt a 3 közepet: számtani, mértani, harmonikust ismerjük, hanem bizonyos feltételek kiszabása esetén más módszer nem alkalmas. Közülük az első háromnak az a tulajdonsága, hogy $a = 0$-ra $d(a) = 0$-t ad. Mit jelent ez? Ez azt jelenti, hogy egy olyan állam, amelyiknek 0 képviselője van, $\dfrac{v}{0}$ súllyal szerepel. Ezt konvencionálisan végtelennek tekintjük, tehát biztosan nagyobb minden olyan $\dfrac{v}{d(a)}$ értéknél, ahol már van legalább 1 képviselő, tehát $a \geqq 1$. Tehát az első három módszer (LO, HK, EA) közös tulajdonsága, hogy először rögtön ad egy képviselőt minden államnak, bármilyen kevés legyen is lakóinak száma. Ezt tulajdonképpen elő is írja az Egyesült Államok alkotmánya, hogy ti. minden államnak legyen legalább egy képviselője. Az EA módszer hibája viszont az, hogy időnként egészen aránytalan képviseletet ad. Számunkra pedig mégiscsak legfontosabb szempont az arányos képviselet.

Jó lenne most már kicsit matematikai mederbe terelni a problémát. Eddig még nem hallottunk egyetlen tételt vagy bizonyítást sem. Pedig van! Ezekre cikkünk folytatásában térünk ki, a lap szeptemberi számában.