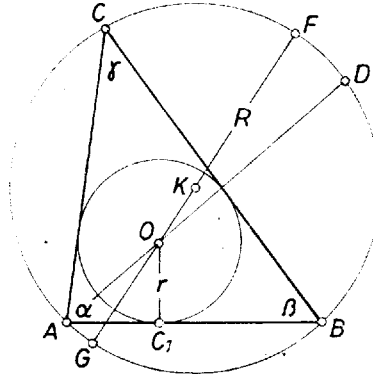


Leginkább talán Euler tételeként ismert az az összefüggés, amelyben egy háromszög beírt és köréírt köre középpontjának a távolságát e körök sugarának segítségével fejezzük ki. Ennek az összefüggésnek nyilvánvaló következménye az a tény, hogy a körülírt kör sugara legalább akkora, mint a beírt kör sugarának a kétszerese. Három példát mutatunk be a továbbiakban annak érzékeltetésére, hogyan hozható kapcsolatba e két kör sugarának aránya a háromszög oldalaival, ill. szövegeivel. Előbb azonban bebizonyítjuk az eredeti összefüggést.

Legyen ABC egy háromszög. A háromszögbe, valamint a háromszög köré írt kör középpontját O -val és K -val, e körök sugarait pedig r -rel és R -rel jelöljük. (A háromszög oldalaira és szögeire a szokásos jelöléseket használjuk.)



Kössük össze az A és O pontokat; a kapott egyenes a háromszög köré írt kört messe D -ben. Hasonlóan legyenek az OK által meghatározott átmérő végpontjai F és G (1. ábra). Írjuk fel a szelőtételt az AD és FG szakaszokra :

$$OG \cdot OF = OA \cdot OD.$$

Mivel $OG + OF = 2R$, ezért a fenti egyenlőség bal oldala éppen

$$(R + OK)(R - OK) = R^2 - OK^2,$$

így

$$R^2 - OK^2 = OA \cdot OD.$$

Fejezzük ki az OA , OD szakaszok hosszúságát r és R segítségével! Az előbbire nyilván

$$OA = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Az AOB háromszög O csúcsánál levő külső szög :

$$\angle DOB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2};$$

mivel a kerületi szögek tétele szerint

$$\angle DBO = \angle DBC + \angle CBO = \angle DAC + \angle CBO = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2},$$

ezért ODB egyenlő szárú háromszög, így

$$OD = BD.$$

Az ugyancsak egyenlő szárú BKD háromszögből végül

$$OD = BD = 2R \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

tehát

$$R^2 - OK^2 = OA \cdot OD = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2rR.$$

Fejezzük ki ebből OK^2 -et:

$$OK^2 = R^2 - 2rR = R(R - 2r).$$

Mivel OK^2 nem lehet negatív, eredményünk azt mutatja, hogy

$$(1) \quad R \geq 2r.$$

Ezzel eljutottunk a címbe szereplő egyenlőtlenséghez. Célunk a továbbiakban az, hogy bemutassunk néhány olyan háromszög oldalaira, szögeire, valamint r -re és R -re vonatkozó egyszerű egyenlőtlenséget, amelyeknek közös vonása, hogy – valamilyen formában – az (1) becslést éleltik.

Ilyen összefüggéshez jutunk például úgy, hogy a $\frac{2r}{R}$ hányadost becsljük, miután azt a háromszög oldalainak, illetve szögeinek segítségével írtuk fel. Jelöljük a szokásos módon s -sel a háromszög félkerületét. Ha az ABC -be írt kör az AB oldalt C_1 -ben érinti, akkor – mint ismeretes –

$$AC_1 = s - a,$$

így az AC_1O derékszögű háromszögből

$$r = (s - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

R értékét CKB egyenlő szárú háromszögből határozhatjuk meg:

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

ezért

$$\begin{aligned} \frac{r}{4R} &= \frac{s - a}{2a} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{s - a}{2a} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{s - a}{a} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b + c - a}{a} \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

A szinusz-tétel segítségével a, b, c kiküszöbölhető:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{b + c - a}{a} \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Legyen $y = \sin \frac{\alpha}{2}$, ekkor tehát

$$\frac{r}{4R} = -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} y;$$

ez azt jelenti, hogy y (valós) gyöke az

$$x^2 - \cos \frac{\beta - \gamma}{2} x + \frac{r}{2R} = 0$$

egyenletnek, következésképpen az egyenlet diszkriminánsa nem lehet negatív:

$$0 \leq \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{2r}{R},$$

azaz

$$\frac{2r}{R} \leq \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Ugyanílyen összefüggés az ABC bármely másik két szögére is nyilván teljesül; ezzel azt kapjuk, hogy

$$(2) \quad \frac{2r}{R} \leq \min \left\{ \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}, \cos^2 \frac{\beta - \gamma}{2}, \cos^2 \frac{\gamma - \alpha}{2} \right\} \leq 1.$$

Próbálkozzunk meg ezután olyan becsléssel, amiben (a szögek helyett) csupán a háromszög oldalai szerepelnek! Legyen először $S = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$. S becslése érdekében az összeget szorzattá alakítjuk :

$$\begin{aligned} S &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma = \\ &= 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \gamma \leq 2 \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \gamma = \\ &= 2 \cos \frac{\gamma}{2} \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right); \end{aligned}$$

a kapott egyenlőtlenség egyik oldala sem negatív, így négyzetre emelhetünk, amiből

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} S^2 &\leq 3 \cos^2 \frac{\gamma}{2} \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2 = 3 \left(1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right)^2 = \\ &= \left(3 - 3 \sin \frac{\gamma}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Az utoljára kapott szorzatra alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepekre érvényes egyenlőtlenséget, következésképpen

$$\frac{3}{4} S^2 \leq \left(\frac{\left(3 - 3 \sin \frac{\gamma}{2} \right) + \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) + \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) + \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right)}{4} \right)^4 = \left(\frac{3}{2} \right)^4,$$

így

$$S \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

azaz

$$S = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

A szinusztétel szerint azonban

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{1}{2R},$$

ezért

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq S = \frac{1}{2R}(a + b + c),$$

vagyis

$$(2a) \quad \frac{a + b + c}{3\sqrt{3}} \leq R.$$

Jelöljük az ABC háromszög a, b, c oldalaihoz (kívülről) hozzáírt körök sugarát rendre r_a, r_b, r_c -vel. Ezek harmonikus és mértani közepeire :

$$\frac{3}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \leq \sqrt[3]{r_a r_b r_c}.$$

Ismeretes, hogy (ABC területét t -vel jelölve)

$$r_a = \frac{2t}{b + c - a}, \quad r_b = \frac{2t}{a - b + c}, \quad r_c = \frac{2t}{a + b - c},$$

így

$$\frac{6t}{a + b + c} \leq \sqrt[3]{\frac{t^3}{(s - a)(s - b)(s - c)}} = t \sqrt[3]{\frac{s}{t^2}},$$

tehát

$$\frac{3}{s} \leq \sqrt[3]{\frac{s}{t^2}}.$$

Köbreemelés, rendezés, majd négyzetgyökvonás után azt kapjuk, hogy

$$3\sqrt{3}t \leq s^2,$$

ebből pedig $rs = t$ figyelembevételével:

$$(2b) \quad 2r \leq \frac{a + b + c}{3\sqrt{3}}.$$

Két utóbbi eredményünket összefoglalva tehát:

$$(3) \quad 2r \leq \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \leq R.$$

Utoljára egy olyan összefüggést bizonyítunk, amelyben az ABC háromszög oldalai és szögei egyaránt előfordulnak (persze továbbra is szimmetrikus szereposztásban). Korábban már láttuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{r}{4R} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\beta-\gamma}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\beta-\gamma}{2} - \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \end{aligned}$$

továbbá

$$r = (s-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

azaz

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{r} (s-a) \sin \frac{\alpha}{2};$$

ezért

$$\begin{aligned} abc \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} &= abc \frac{1}{r^3} (s-a)(s-b)(s-c) \cdot \frac{r}{4R} = \\ &= 4Rt \frac{1}{r^3} \cdot \frac{t^2}{s} \cdot \frac{r}{4R} = \frac{t^3}{r^2 s} = rs^2. \end{aligned}$$

A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint így

$$a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt[3]{rs^2}.$$

Alkalmazzuk most a (2b) becslést :

$$3\sqrt[3]{rs^2} = 3\sqrt[3]{r \left(\frac{a+b+c}{2} \right)^2} \geq 3\sqrt[3]{r \cdot 27r^2} = 9r, \text{ tehát}$$

$$(3a) \quad r \leq \frac{1}{9} \left(a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} \right).$$

Most az egyenlőtlenség jobb oldalán álló mennyiséget becsljük felülről. Az AC_1O derékszögű háromszögből

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AC_1}{AO} = \frac{s-a}{\sqrt{r^2 + (s-a)^2}};$$

mivel pedig

$$\begin{aligned} r^2 + (s-a)^2 &= \frac{t^2}{s^2} + (s-a)^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + (s-a)^2 = \\ &= \frac{s-a}{s} ((s-b)(s-c) + s(s-a)) = \frac{(s-a)bc}{s}, \end{aligned}$$

ezért

$$a \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{s} \cdot \frac{a\sqrt{s-a}}{\sqrt{bc}} = \sqrt{s} \cdot \sqrt{\frac{a^3(s-a)}{abc}}$$

A számtani és négyzetes közép között fennálló egyenlőtlenség szerint így

$$\begin{aligned} (3b) \quad a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{s} \left(\sqrt{\frac{a^3(s-a)}{abc}} + \sqrt{\frac{b^3(s-b)}{abc}} + \sqrt{\frac{c^3(s-c)}{abc}} \right) \leq \\ &\leq \sqrt{3s} \sqrt{\frac{a^3(s-a) + b^3(s-b) + c^3(s-c)}{abc}}. \end{aligned}$$

Legyen

$$P = \frac{a^3(s-a) + b^3(s-b) + c^3(s-c)}{abc};$$

megmutatjuk, hogy

$$(3c) \quad \sqrt{s} \cdot \sqrt{P} \leq \frac{1}{2}(s+P).$$

Valóban, (3c) mindkét oldala nemnegatív, és ezek négyzeteire:

$$sP \leq \frac{1}{4}(s^2 + 2sP + P^2),$$

hiszen rendezés után ez éppen

$$4sP \leq s^2 + 2sP + P^2,$$

azaz

$$0 \leq s^2 - 2sP + P^2 = (s-P)^2,$$

ami természetesen igaz. (3b) és (3c) szerint tehát

$$(3d) \quad a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(s + \frac{a^3(s-a) + b^3(s-b) + c^3(s-c)}{abc} \right).$$

Ezután azt látjuk be, hogy

$$\frac{a^3(s-a) + b^3(s-b) + c^3(s-c)}{abc} \leq s.$$

Rendezéssel:

$$a^3(b+c-a) + b^3(a+c-b) + c^3(a+b-c) \leq abc(a+b+c),$$

azaz

$$0 \leq a^2(b-a)(c-a) + b^2(a-b)(c-b) + c^2(a-c)(b-c).$$

Legyen például $a \leq b \leq c$; az utóbbi egyenlőtlenség jobb oldala ekkor a következőképpen becsülhető :

$$\begin{aligned} & a^2(b-a)(c-a) + b^2(a-b)(c-b) + c^2(a-c)(b-c) = \\ & = a \cdot a(b-a)(c-a) - b^2(b-a)(c-b) + c^2(c-a)(c-b) \geq \\ & \geq a(c-b)(b-a)(c-a) - b^2(c-a)(c-b) + c^2(c-a)(c-b) = \\ & = (c-a)(c-b)(a(b-a) - b^2 + c^2) \geq (c-a)(c-b)(a(b-a)) \geq 0, \end{aligned}$$

így (3e) is teljesül. (3d) és (3e) alapján tehát

$$a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

A jobb oldalra most alkalmazható (2a), ebből pedig – (3a)-val kiegészítve – azt kapjuk, hogy

$$(4) \quad r = \frac{1}{9} \left(a \cos \frac{\alpha}{2} + b \cos \frac{\beta}{2} + c \cos \frac{\gamma}{2} \right) \leq \frac{1}{2}R.$$