A gyakorlati élet problémái gyakran vezetnek valamilyen egyenletre. Ezek megoldásait többnyire csak közelítőleg határozzuk meg. Több okunk is van erre: egyrészt, a megoldásokra – a konkrét alkalmazástól függően – csak bizonyos pontosságig van szükségünk, másrészt pedig az egyenletet meghatározó adatok már maguk is csak közelítések (pl. mérések eredményei). Végül az egyenletek többségénél egyáltalán *nem is létezik* olyan eljárás, amelynek a segítségével a megoldás „pontos" értéke előállítható. (Ez úgy értendő, hogy az egyenlet megoldása például olyan valós szám is lehet, ami az egyenletben szereplő paraméterekből alapműveletek és gyökvonások semmilyen véges sokszori alkalmazásával sem kapható meg.)

Most egy olyan módszert ismertetünk, amellyel algebrai egyenletek gyökeit lehet közelítőleg (tetszőleges pontossággal) kiszámítani. Az egyszerűség kedvéért ezt csak harmadfokú egyenletekre mutatjuk be, ami persze az eljárásnak korántsem tipikus alkalmazása. (Harmadfokú egyenletek gyökeinek felírására ugyanis létezik „pontos" megoldóképlet, a néhány alapműveletet és négyzetgyök-, valamint köbgyökvonásokat tartalmazó ún. Cardano-formula.)

Föltételezzük, hogy az egyenletnek valamennyi gyöke „érdekel bennünket"; ha ugyanis valamilyen korlátozás volna a gyökökre (pl. az, hogy egy adott intervallumban helyezkednek el), akkor más eljárást választanánk.

Legyen a megoldandó egyenlet a következő:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

ahol a, b és c valós számok és $c \neq 0$. Ha a keresett gyököket α, β, γ-val jelöljük, akkor az egyenlet bal oldala így is írható:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma), \tag{2}$$

és a Viéta–féle összefüggések szerint

$$\alpha+\beta+\gamma = -a, \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = b, \quad \alpha\beta\gamma = -c. \tag{3}$$

Tegyük fel még, hogy az α, β, γ gyökök abszolút értékei különbözőek, mondjuk

$$|\alpha| > |\beta| > |\gamma|. \tag{4}$$

Ha $\gamma \neq 0$ is teljesül, akkor (3) alapján

$$\alpha = -\frac{a}{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha}}; \tag{5}$$

a (3) és (5) összefüggésekből így

$$\beta = \frac{b}{\alpha\left(1+\dfrac{\gamma}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)} = -\frac{b}{a}\cdot\frac{1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha}}{1+\dfrac{\gamma}{\beta}+\dfrac{\gamma}{\alpha}}, \tag{6}$$

és hasonlóan (3), (5) és (6) szerint

$$\gamma = -\frac{c}{\alpha\beta} = -\frac{c}{b}\left(1+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\gamma}{\alpha}\right). \tag{7}$$

Látható, hogy ha α, β, γ abszolút értékei lényegesen különbözőek, azaz $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|$, $\left|\dfrac{\gamma}{\beta}\right|$ (és így $\left|\dfrac{\gamma}{\alpha}\right|$ is) „elég kicsi", akkor

$$\alpha \approx -a, \quad \beta \approx -\frac{b}{a}, \quad \gamma \approx -\frac{c}{b}. \tag{8}$$

Módszerünknek éppen az a lényege, hogy α, β és γ abszolút értékeit „széthúzzuk" és így a (8)-ban szereplő közelítések kellően pontosak lesznek. Tegyük fel tehát,hogy $|\alpha| > |\beta| > |\gamma| > 0$, azaz

$$0 < \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|, \quad \left|\frac{\gamma}{\beta}\right| < 1.$$

Ha áttérünk arra az egyenletre, amelynek gyökei az eredeti egyenlet gyökeinek négyzetei: α^2, β^2, γ^2, akkor $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|$, $\left|\dfrac{\gamma}{\beta}\right|$ helyett ezek négyzeteivel lesz dolgunk, amelyek már jóval kisebbek. Ha ugyanis az egyik gyök például 1/10 része volt a másiknak, akkor a négyzeteik aránya már 1:100. Az áttérés ismételgetésével rendre a gyökök 4-edik, 8-adik, 16-odik stb. hatványai által kielégített egyenletekre térünk át, és így a gyökök abszolút értékeinek arányai idővel tetszőlegesen kicsinnyé válnak.

Határozzuk meg tehát annak a harmadfokú egyenletnek az együtthatóit, amelynek gyökei α^2, β^2 és γ^2. Ez éppen az

$$(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)=0$$

egyenlet. Ennél valamivel egyszerűbb az

$$(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)=0$$

egyenlet együtthatóinak a kiszámítása. Mivel

$$(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdot(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma),$$

ezért az (1)-beli egyenlet bal oldalát kell azzal a polinommal megszorozni, amelynek gyökei $-\alpha$, $-\beta$ és $-\gamma$. Könnyen látható, hogy ez éppen az x^3-ax^2+bx-c polinom; így

$$\begin{aligned}(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)(x^2-\gamma^2)&=(x^3+ax^2+bx+c)(x^3-ax^2+bx-c)=\\&=x^6+(-a^2+2b)x^4+(b^2-2ac)x^2-c^2.\end{aligned}$$

Tehát az a harmadfokú polinom, aminek gyökei $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$, a következő:

$$x^3+(-a^2+2b)x^2+(b^2-2ac)x-c^2. \tag{9}$$

Próbáljuk ki az eljárást egy számpéldán. Legyen a megoldandó egyenlet:

$$x^3+2{,}1x^2-29{,}3x+40=0. \tag{10}$$

Az együtthatókkal mindvégig három értékes számjegyig számolunk. A gyökök négyzetére vonatkozó egyenlet:

$$x^3+(-2{,}1^2-2\cdot 29{,}3)x^2+(29{,}3^2-2\cdot 2{,}1\cdot 40)x-4^2\cdot 10^2=0,$$

azaz

$$x^3-63x^2+690x-1600=0.$$

A negyedik hatványokra vonatkozó egyenlet:

$$x^3+(-63^2+2\cdot 690)x^2+(690^2-2\cdot 63\cdot 1600)x-1600^2=0,$$

vagyis

$$x^3-2{,}59\cdot 10^3\cdot x^2+2{,}74\cdot 10^5x-2{,}56\cdot 10^6=0.$$

A 8-adik hatványok az alábbi harmadfokú polinomnak a gyökei:

$$\begin{aligned}x^3+(-2{,}59^2\cdot 10^6+2\cdot 2{,}74\cdot 10^5)x^2+(2{,}74^2\cdot 10^{10}-2\cdot 2{,}59\cdot 2{,}56\cdot 10^9)=\\=x^3-6{,}16\cdot 10^6x^2+6{,}18\cdot 10^{10}x-6{,}55\cdot 10^{12},\end{aligned}$$

a 16-odik hatványok pedig az

$$\begin{aligned}x^3+(-6{,}16^2\cdot 10^{12}+2\cdot 6{,}18\cdot 10^{10})x^2+(6{,}18^2\cdot 10^{20}-2\cdot 6{,}16\cdot 6{,}55\cdot 10^{18})x-\\-6{,}55^2\cdot 10^{24}=x^3-3{,}78\cdot 10^{13}x^2+3{,}74\cdot 10^{21}x-4{,}29\cdot 10^{25}\end{aligned}$$

polinomé. Ha a következő lépést is elvégeznénk, akkor az új együtthatók kiszámítása során a kétszeres szorzatok abszolút értéke mindenütt kisebb lenne, mint a megfelelő négyzetes tag 100-ad része. Három értékes jegy pontosságig tehát az új együtthatók abszolút értéke a régiek négyzete; így a gyököket akár az új, akár az előző egyenletből számítjuk a (8) szerinti közelítéssel, a megfelelő gyökvonás után ugyanazt kapjuk. Esetünkben tehát

$$\alpha^{16}\approx 3{,}78\cdot 10^{13},\quad \beta^{16}\approx\frac{3{,}74}{3{,}78}\cdot 10^8,\quad \gamma^{16}\approx\frac{4{,}29}{3{,}74}\cdot 10^4,$$

azaz

$$|\alpha|\approx 7{,}056,\quad |\beta|\approx 3{,}160,\quad |\gamma|\approx 1{,}778.$$

(A 16-odik gyökvonás miatt 3 helyett 4 értékes jegy pontosságra is számíthatunk.)

Példánkban már csak a gyökök előjelének megállapítása van hátra; ezt úgy végezhetjük el, hogy a gyökök két-két szóba jövő értékét behelyettesítjük az eredeti (10) egyenletbe. Ez a lépés az eljárás egyetlen próbálgató eleme, és egyben mindjárt az ellenőrzése is. Eredményül azt kapjuk, hogy

$$\alpha\approx -7{,}056,\quad \beta\approx 3{,}160,\quad \gamma\approx 1{,}778.$$

Ezeket az egyenletbe helyettesítve, a kapott értékek: $-0{,}00$, $-0{,}06$, $0{,}16$ – valóban nullához közeliek. (Ezúttal persze elég lett volna csupán α előjelét meghatározni, ennek ismeretében ugyanis $\beta+\gamma=-2{,}1-\alpha=4{,}956>0$ és $\beta\gamma=-\dfrac{40}{\alpha}=5{,}669$ pozitív, ezért β és γ szükségképpen pozitívak.)

Eljárásunk 3-adfokú helyett magasabb fokú algebrai egyenletek közelítő megoldására is alkalmas. A keresett gyökök négyzetei által kielégített egyenlet együtthatóit (9)-hez hasonló formulákkal kaphatjuk meg úgy, hogy az eredeti

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \tag{11}$$

polinomot megszorozzuk annak „negatív polinomjával".

$$x^n-a_{n-1}x^{n-1}+-\ldots+(-1)^{n-1}a_1x+(-1)^na_0\text{-val.}$$

A $2n$-edfokú f szorzatpolinomban x páratlan kitevőjű hatványainak együtthatója nulla, hiszen

$$\begin{aligned}f&=[(x^n+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots)+(a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots)]\cdot\\&\cdot[(x^n+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots)-(a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots)]=\\&=(x^n+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots)^2-(a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots)^2.\end{aligned}$$

$f(\sqrt{x})=x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$ tehát ugyancsak n-edfokú polinom, együtthatói:

$$b_k=(-1)^{n-k}(a_k^2+2a_{k+2}a_{k-2}-2a_{k+1}a_{k-1}+-\ldots). \tag{12}$$

Az eljárást a t-edik lépésben abbahagyhatjuk, ha az éppen akkor kapott

$$x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0$$

polinom segítségével (12) szerint képzett formulákban a kétszeres szorzatok összegének abszolút értéke az előírt nagyságrenddel kisebb a megfelelő négyzetes tagnál. A (11) polinom gyökeire ekkor kívánt pontosságú becslést ad

$$|\alpha_1|\approx\sqrt[2^t]{-c_{n-1}},\quad |\alpha_2|\approx\sqrt[2^t]{-\frac{c_{n-2}}{c_{n-1}}},\ldots,\quad |\alpha_n|\approx\sqrt[2^t]{\frac{c_0}{c_1}}.$$

Az ismertetett módszert a XIX. század első felében, nagyjából egy időben fedezte fel a német *Gräffe*, az orosz *Lobacsevszkij* és a belga *Dandelin.* Az eljárás jól megfelelt a kor kívánalmainak, hiszen a hozzá szükséges számítások pusztán az akkor használt logaritmustáblázatok segítségével is viszonylag kényelmesen elvégezhetők. Az itt leírtak persze nem alkalmazhatók azokban az esetekben, amikor a gyökök között egyenlő abszolút értékűek is vannak, vagy az egyenlet nem mindegyik gyöke valós. (Ilyenkor a kétszeres szorzatok „nem akarnak" eltörpülni a négyzetes tagok mellett. Ez a probléma már a harmadfokú esetben is jelentkezhet.) A meggondolások alkalmas kiegészítésével azonban ilyenkor is célhoz érhetünk, ám ezt most nem részletezzük.