Bizonyára sokan ismerik az 1–25 számokból álló bűvös négyzet gyors felírására alkalmas *sziámi szabályt* (másképpen *kínai* vagy *indus* szabályt), Délkelet-Ázsia matematikusainak még az időszámításunk előtti időkben talált tetszetős eredményét.
Mai szemmel az tartható benne bűvösnek – kifejezőbben: *rejtélyesnek* –, hogy felismerhető számtani művelet végzése nélkül olyanra sikerül az elrendezés, hogy minden sor, oszlop, átló összege ugyanannyi, az $1+2+\ldots+25=325$ összeg $1/5$ része, 65. Ez a négyzet bűvös állandója.– Meg is adjuk az árát ennek az igazi munka nélkül elért sikernek!

Az elrendezést az 1. ábrán idézem, bár – őszintén szólva, személy szerint – mindig görbe szemmel nézek rá. Ennek a „potya” receptnek a létezése kisiklatja a probléma helyes értékelését, bénítja a fejlődést. Egészségtelen kultusz is épült rá (ritmus stb.). Miatta passzív a kérdéssel szemben a közfelfogás.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

1. ábra

Olyan egyedülvalónak, utánozhatatlannak vélik sokan, mint a Kínai Nagy Fal vagy a Szaturnusz gyűrűje. Pedig félmilliónál is több megoldást lehetne fölírni az 5×5-ös problémára néhány nagyobb elv és sok kisebb fogás vegyes alkalmazásával! – Kivétel is és jellemző is az az eset, hogy pár éve valaki a Bolyai Társulattól arról kért tájékoztatást, hogyan kaphatna szabadalmat „találmányára”, egy más, 5×5-ös elrendezésre. Csak néhány további példány láttán húzta elő az illető a zsebéből „titkát”, ami azután rendszeres gondolkodásról tett bizonyságot. Rejtélyek nélkül.

Nagyobbítással a sziámi szabály révén minden páratlan n rendszámhoz fölírható egy bűvös négyzet az $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n^2$ számokból, a páros rendszámokra viszont nincs ilyen egyszerű recept a „nagy bűvös szakácskönyvben”. A párosokhoz újabb elvek alkalmazásával szerkesztettek bűvös négyzeteket. (Természetesen a régi „regulák” eredményeit is meg lehet magyarázni, miért bűvösek.) Így alakult ki a bűvösnégyzet-problémának egy „nehézség szerinti” osztályozása: legkönnyebb a páratlanok esete, a párosok közül könnyebbek az $n=4k$ alakú rendszámok, végül legnehezebb az $n=4k+2$ alakú („egyszerűen páros”) rendszámok esete, aminek legkisebb képviselője a 6-os. Bár valami van ebben, mégis elég sekély szempont ez, hiszen mindenki azt tartja könnyűnek, amit már tud – és megfordítva.– Egyébként 300 éve múlt már, hogy *Frénicle de Bessy* francia kutató összeállította a 4×4-es megoldások teljes atlaszát, 880 elrendezést, a szimmetrikus állásokat csak egyszer számítva. Pontos létszám csak erre, és az $n=3$ esetre ismeretes; ez utóbbira ez a szám 1 (2. ábra), és ez – a négyzet geometriai szimmetriáinak megfelelően – 8 állásban szemlélhető, tükrözések és forgatások nyomán.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

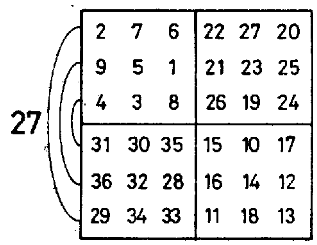
2. ábra

Az alább vázolandó építési elvvel a „nehéz” $n=6$-os esetet tesszük könnyűvé. „Modern elem” benne, hogy mintegy „előgyújtást” használ fel: úgy készít egy $2n$-edrendű bűvös négyzetet, ha valaki megad egy n-edrendűt. Egyedül 4-edrendűt nem tud, mert természetesen senki sem tud beleadni 2×2-es megoldást.

Forrásunk[1] szerint az elvet 1918-ban írta le egy levélben *R. Strachey*. Lényegében aszerint, de mégis némi *tágítással* és *módosítással* építünk ki egy 6×6-os bűvös négyzetet az 1–36 számokból, állandója tehát 111 lesz. „Előgyújtásul” persze a 2. ábrán látható négyzetet használjuk fel, ennek állandója 15.

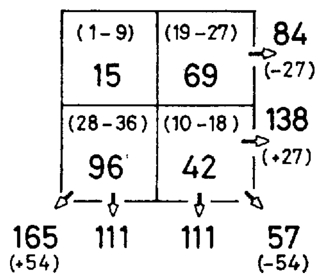
A 6×6 mezőt felosztjuk négy, egyenként 3×3 mezős negyedre, számainkat pedig négy sorozatra, csupa egymás utáni számokból 1–9-ig, tovább 18-ig, 27-ig, 36-ig. Előkészítésül ezekből írunk be egy-egy bűvös négyzetet, egymástól függetlenül, sorra a bal felső, a jobb alsó, a jobb felső negyedbe, a bal alsóba pedig némi korlátozással (3. ábra). Mintának a 2. ábrát vagy 7 szimmetrikus társának bármelyikét vehetjük, számait az illető sorozat szerint 9-cel, 18-cal, ill. 27-tel növelve. Itt az első három sorozatból beírt bűvös négyzet mintáját tetszőlegesen választottuk a 8 lehetőség közül, a bal alsó negyed mintájául pedig azt vettük, amelyik a fölötte álló negyedbe választott mintának a vízszintes középvonalra való tükörképe. Ezáltal a tábla bal felében a tükrös helyzetű számok különbsége mind a 9 mezőpárban $27(=31-4=30-3=\ldots=33-6)$. (Forrásunkban az uralkodó szokás szerint mindhárom előbbi negyed mintája ugyanaz az állás, mi viszont nem akarunk ilyen fétiseket, formabontásunkkal mindjárt a variációs lehetőségekre is fel akarjuk hívni a figyelmet. Ezt értettük az említett *tágítás*on.)

[1] *Rouse Ball – Coxeter* : Mathematical Recreations (11. kiadás, 1963, London, Macmillan).



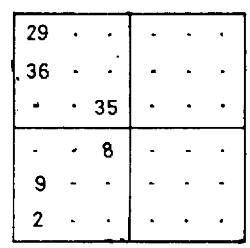
3. ábra

Ez az ábra máris „majdnem bűvös”. Oszlopai bűvösek, sorainak, átlóinak összegei pedig *rendszeres eltéréseket* mutatnak az állandótól. Ezeket fogjuk megszüntetni *rendszeres cserékkel.* Az egyes negyedek állandói a 15-höz képest sorra $3 \cdot 9 = 27$-tel növekednek, a jobb alsóban 42, majd 69, 96. A felső 3 sor összegei $111 - (15 + 69) = 27$ hiányt mutatnak, az alsókéi $(96 + 42) - 111 = 27$ többletet, az átlók pedig 2-szer ekkorát, 54-et, a főátló (a jobbra lejtő) hiányt, a mellékátló többletet. Ezt „a nagybani leltárt” vázolja a 4. ábra.



4. ábra

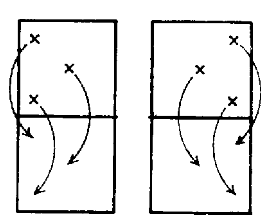
A tábla bal felében végzett 3 szimmetrikus csere útján mindezek az eltérések megszűnnek. Egy-egy cserét végzünk az 1. és 6. sorok között, valamint a további 2 szimmetrikus sorpár között, de úgy, hogy két csere átlóbeli számokkal, a harmadik pedig átlón kívüliekkel történjék. Az 5. ábrán csak a cserélt számok láthatók. Az oszlopösszegek nem változtak, tehát a további 30 mező számait az előbbiből átmásolva kész is a bűvös négyzet.



5. ábra

Természetesen a következő kérdés az, hogy hány kitöltéshez juthatunk ezzel a módszerrel. A példát, önmagát is beleértve, $8^3 \cdot 6 = 3072$-féleképpen lehet utánozni. A 8-as tényezők az első három negyed számára a 2. ábra állásának megválasztásaiból származnak, a $6 = 3 \cdot 2$ pedig az 5. ábra mintájára szóba jövő „cserélési térképek” száma: $\binom{3}{2} = 3$-féleképpen választható az átlókból cserélő két számpár (ti. annak egyik tagja), és 2-féleképpen a még nem korrigált sorpárból az átlóba nem tartozó szám (ami az 5. ábrán a 36–9 pár). Mindezek az elrendezések lényegesen különbözők, a négyzet semmiféle szimmetriája nem viszi őket egymásba. – Az eddigi teljesítményt később még majd növekedni látjuk.

Itt említjük meg, hogy az eredetiben csak 2-féle cserélő térképről lehetett szó. Ugyanis *Strachey* mindegyik negyedbe ugyanazt az állását ajánlotta a 2. ábrának, ezért nála a 27-es különbözetű számpárok nem tengely-tükrösen állnak, hanem három mezővel függőlegesen eltolódva. Emiatt a negyedátlókat külön-külön kellett javítani két-két számpárral. Mindig cserélni kellett a negyedek középszámait, amelyek mindkét átlóba beletartoznak. A két térképet a 6. ábrán vázoltuk. – Ezeket értettük az elv föntebb említett *módosításán*, vagyis, hogy eltolás helyett tükrözéssel alakítottuk ki a csereképes számpárokat a több variáció érdekében.



6. *ábra*

*

Forrásunk csak a *páratlan rendszámok megduplázására* ajánlja Strachey eljárását. Bizonyára nem tartották érdekesnek kimondani, hogy az elv a párosokra is használható. (Valóban, csak annak érdemes ezekkel is foglalkoznia, aki – mint egy bélyeggyűjtő – a különböző elvek alapján készült bűvös négyzeteket külön is gyűjti. Másrészt a föntebbi „osztályozás” szerint azok úgyis könnyebbnek minősültek.) – A nagyobb rendszámok megduplázásakor az előkészítés jobb oldali negyedei is szerephez jutnak, sőt, szükség is van rájuk, mert ott 3-szor kisebb a cserélő számok különbsége. Például $n = 5$ esetében a sorpárok eltérése az állandótól le- és fölfelé $5^3 = 125$, az átlóké 250, és egy bal oldali csere $3 \cdot 25 = 75$-tel tud javítani, aminek sem a 125, sem a 250 nem többszöröse. Besegít viszont a jobb oldali cserék „aprópénznek” számító 25-ös különbsége. Ilyenkor persze már az is szükséges, hogy jobbról is egyezzék a két negyed mintája, illetve könnyebb, ha azok egymás tükörképei, a bal oldali negyedek közös mintájától viszont ilyenkor is függetlenek.

Mármost a $(2k+1)$-es rendszám duplázásakor sorpáronként a bal féltáblán k, a jobb oldalin $(k-1)$ számpár cserél úgy, hogy balról $(k+1)$, jobbról $(k-1)$ sor egy cserélője tartozzék bele az átlóba. A $2k$-rendű négyzetek megduplázása valóban jóval egyszerűbb: sorpáronként mindkét oldalon k számpár cseréljen, és az átlókba is mindkét oldalon k pár tartozzék bele. Vagyis itt az előkészített számoknak éppen a fele cserél helyet (a páratlan esetben *majdnem* a fele). Megjegyzendő, hogy az „aprópénz” a sorpárokban ellene dolgozik a bal oldali cseréknek, az átlókban viszont egy irányban hatnak az eltérések megszüntetésében. ($n = 6$-tól kezdve csökkenteni lehet a végzendő cserék számát lásd 9. ábra).

Minderről az általános esetben is könnyen meggyőződhetünk. A 4. ábra mintájára ugyanis k-nak legfeljebb 3-adfokú polinomjait kapjuk azokban a kifejezésekben, amelyek a negyedek és a nagy négyzet állandóira, továbbá a deficit–többletekre, ill. az egy cserével elérhető javításokra adódnak. Aki mindezt átgondolja vagy végigszámolja, nagyobb élményt szerez magának, mintha sziámi módon végigszlalomoz akár egy 11×11-es négyzetet! És azt is tudni fogja, miért bűvösek új négyzetének a vonalai!

*

„Modern technikával” további bűvös négyzeteket nyerhetünk a fönti eljárásból, ha megpróbálunk válaszolni a következő kérdésre: „mit lehetne még mellőzni az előkészítés sok szabályszerűségéből?” A gazdaságosság elvét mindjárt az ezt vizsgáló ábrába is belevisszük. Következő 6×6-os négyzetünket a 0–35 számkészletből építjük, így a bűvös állandó 105 lesz, a mintákban pedig az 1-esekkel csökkentett 0–8 számokból 12.

Beírandó számainkat két-két tagra bontjuk, egyik a 3×3-as mintából származó „kisebb rész”, a másik a 9-es, 18-as, 27-es növelésekből a „nagyobb rész”, ami az előkészítésben negyedenként még ugyanaz. Ezután a részeket „szétírjuk” egy-egy külön négyzetbe, az eredeti négyzet *komponense*ibe (összetevőibe). 7. ábránkon a nagy részek komponensében az óriási 9-es, 18-as azt jelzi, hogy közös mind a kilenc számra. A nagy komponensben már végrehajtottunk 3 cserét valamelyik térkép szerint. Mondhatjuk, hogy a kicsiben is, hiszen ez a felbontás azt mutatja, hogy a kisebb részek komponense „észre sem veszi” a cseréket, pl. az 1. és a 6. sor 6-osainak a cseréjét a 2. oszlopban – éppen így választottuk meg ugyanis a mintákat.

<table>
<tr><td>0</td><td>27</td><td>0</td><td colspan="3" rowspan="3">18</td></tr>
<tr><td>0</td><td>27</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>27</td></tr>
<tr><td>27</td><td>27</td><td>0</td><td colspan="3" rowspan="3">9</td></tr>
<tr><td>27</td><td>0</td><td>27</td></tr>
<tr><td>27</td><td>0</td><td>27</td></tr>
</table>

4	6	2	6	1	5
8	1	3	2	3	7
0	5	7	4	8	0
0	5	7	1	8	3
8	1	3	6	4	2
4	6	2	5	0	7

7. *ábra*

És most bevalljuk: a kis komponens három negyedéből kiloptuk annak a (3-tagú) kis átlónak a bűvösségét, amelyik úgysem tartozik bele a nagy négyzet átlójába: balról fönt és lent egyformán 0+1+2 nem 12, jobbról fönt 6+3+0 sem az, dehát a 3. ábrában sem érvényesült az, hogy 22+23+24 annyi, mint pl. 22+27+20. A jobb alsó negyedben hagytuk meg hírmondónak a 3+4+5=12-es mellékátlót csak azért, hogy lássuk, a kiirtás sem kötelező.

Egybeírva a két komponenst, azaz összeadogatva a részeket, „visszakapjuk” azt, ami igazában még nem is volt együtt. A felső sor ez lesz: $4 + 33 + 2 + 24 + 19 + 23 = 105$.

Itt is összeszámlálhatjuk a módszerünkkel nyerhető különböző kitöltéseket, de ezt már az érdeklődő Olvasóra hagyjuk.

*

A kis komponens tulajdonképpen olyan bűvös négyzet, amelyben a 0–8 számok 4-szer fordulnak elő, és bűvösnek megkívánt vonalain az összeg 24. A nagy komponensről hasonlót mondhatunk, 81-es összegekkel. Lényegében a 9-alapú számrendszerbe átírt alakjukból építettük föl számaink bűvös elrendezését. – Hasonlóan az 5-ös számrendszerbeli alakok használatával lehet „szépen” belátni az 1. ábra bűvösségét is, ha előzőleg minden számát 1-gyel csökkentjük.

Annyira XX. századi ez az elv, hogy továbbfejlesztve még önmaga sikereit is képes „megrongálni”. Egy másik szép elvvel kombinálva ugyanis kiderül, hogy *még gyengébb* előkészítésből is adhat bűvös négyzetet. Ezt azonban itt nem ismertetjük.

35	1	15	32	7	21
3	23	25	9	20	31
22	27	2	19	33	8
26	10	24	29	4	18
12	14	34	6	17	28
13	36	11	16	30	5

8. ábra

128	135	22	6	7	29	101	79	78	94	99	92
133	131	21	1	5	36	108	77	73	93	95	97
24	19	134	143	3	4	76	75	107	98	94	96
17	10	123	116	30	31	103	102	80	87	82	89
120	122	16	28	32	9	81	104	100	88	86	84
121	126	11	33	34	2	74	106	105	83	90	85

9. ábra

Befejezésül a 8–9. ábrát ajánljuk a kutatásra hajlamos Olvasónak, ezek is a Strachey-elv távoli származékai; a 9. ábra egy 12-edrendű bűvös négyzetnek a felső fele. Reméljük, hogy egy Olvasónk sem értelmezi a fentieket a „ponyvairodalom” nyelvén, hogy bűvös négyzetet „ így kell” csinálni, hanem helyesen, hogy *így is lehet.* És persze másképpen is.