

$$\begin{aligned}
(1) \quad & xy = z(x + y + z), \\
(2) \quad & yz = 4x(x + y + z), \\
(3) \quad & zx = 9y(x + y + z).
\end{aligned}$$

Jelöljük $x + y + z$ értékét t -vel. Ha $t = 0$, egyenleteink jobb oldalán 0 áll, tehát az ismeretlenek között is van 0-val egyenlő. Nem lehet, hogy csak az egyik ismeretlen értéke legyen 0, hiszen akkor annak a bal oldalnak az értéke nem lehetne 0, amelyikben ez az ismeretlen nem szerepel. Ha viszont az ismeretlenek közül kettő 0-val egyenlő, akkor a harmadik értéke is 0, hiszen az összegük 0. Ha tehát $t = 0$, akkor csak

$$(4) \quad x = y = z = 0$$

lehet, ami valóban gyöke az egyenletrendszernek. Megmutatjuk, hogy ha $t \neq 0$, akkor egyik ismeretlen értéke sem lehet 0. Ha például x volna 0, akkor (2) szerint a másik kettő között is volna 0-val egyenlő, de akkor a bal oldalak mind 0-val volnának egyenlők, ami $t \neq 0$ miatt csak úgy lehetne, ha mindhárom változó értéke 0 volna, ez viszont épp $t \neq 0$ miatt nem lehet.

Az egyenleteket páronként összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
xy^2z &= 4xzt^2 \\
xyz^2 &= 36xyt^2 \\
x^2yz &= 9yzt^2.
\end{aligned}$$

Mivel már csak $t \neq 0$ mellett kell a gyököket meghatároznunk, az ismeretlenek értéke nem lehet 0, egyszerűsíthetünk velük. Négyzetgyököt is vonva azt kapjuk, hogy

$$y = \pm 2t, \quad z = \pm 6t, \quad x = \pm 3t.$$

Ha $z = 6t$, akkor $x + y + z \geq -3t - 2t + 6t = t$, és az egyenlőség jele csak akkor lehet érvényes, ha $x = -3t$, $y = -2t$. Ha $z = -6t$, akkor $x + y + z \leq 3t + 2t - 6t = -t$, tehát az összeg nem lehet t . Azt kapjuk tehát, hogy csak

$$(5) \quad x = -3t, \quad y = -2t, \quad z = 6t$$

jöhet szóba. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ezek az értékek viszont tetszőleges t mellett kielégítik az egyenletrendszerünket. Mivel (5) a (4) gyököt is megadja $t = 0$ mellett, (5) megadja a vizsgált egyenletrendszer összes megoldását.